

**Pytania na egzamin z przedmiotu
WSTĘP DO MECHANIKI NIEBA
29.01.2023**

I. Pojęcia

1. Prawo grawitacji w postaci słownej i jako równanie. Stała Gaussa a stała grawitacji.
2. Równania ruchu dwóch ciał w dowolnym układzie inercjalnym i równania ruchu względnego.
3. Uogólnione I, II i III prawo Keplera dla różnych typów orbit keplerowskich.
4. Na rysunku orbity eliptycznej zaznaczyć: osie ξ, η , półos wielką a , półos małą b , odległość ogniskową c , odległość perycentrum q , odległość apocentrum Q , parametr p , punkt o anomalii prawdziwej $f = 7\pi/4$, wektor Laplace'a \vec{e} .
5. Na rysunku orbity hiperbolicznej zaznaczyć: ξ, η , półos rzeczywistą a , półos urojoną b , odległość ogniskową c , odległość perycentrum q , parametr p , punkt o anomalii prawdziwej $f = 7\pi/4$, wektor Laplace'a \vec{e} (uwaga: a, b i c zaznaczyć na dwa możliwe sposoby).
6. Wykreślić hodograf dla orbity kołowej, eliptycznej, parabolicznej i hiperbolicznej, odkładając na osiach prędkość $\dot{\xi}$ i $\dot{\eta}$ (tylko dla orbit z niezerowym momentem pędu). Zaznaczyć punkt odpowiadający prędkości w perycentrum.
7. Jaki jest związek między wartościami stałych ruchu (h, \vec{G}, \vec{e}) a typem orbity ?
8. Jaki jest związek drugiej prędkości kosmicznej z ruchem parabolicznym ?
9. Co to jest linia węzłów i linia apsyd. Kiedy one istnieją, a kiedy nie ?
10. Jak definiujemy nachylenie orbity i kiedy ono nie istnieje ?
11. Twierdzenie Newtona o przyciąganiu kuli i jego konsekwencje dla zagadnienia dwóch ciał.
12. Elementy keplerowskie orbity i elementy oskulacyjne.

II. Wyprowadzenia

1. Wyprowadzić całki środka masy $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{A}, m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 - \vec{A}t = \vec{B}$ z II i III zasady dynamiki w przypadku zagadnienia dwóch ciał.
2. Wyprowadzić I prawo Keplera (równanie stożkowej $r = p/(1 + e \cos f)$) z całek Laplace'a $\vec{e} = (\vec{v} \times \vec{G})/\mu - \hat{r}$.

3. Wyprowadzić lub zweryfikować dwa związki między całkami siły żywej $h = v^2/2 - \mu/r$, pól $\vec{G} = \vec{r} \times \vec{v}$ i Laplace'a $\vec{e} = (\vec{v} \times \vec{G})/\mu - \hat{r}$:

$$\vec{e} \cdot \vec{G} = 0, \quad e = \sqrt{1 + 2hG^2/\mu^2}.$$

4. Wyprowadzić eliptyczne równanie Keplera $M = E - e \sin E$ korzystając z wzorów $\dot{E} = na/r$ i $r = a(1 - e \cos E)$.
5. Wychodząc od $\xi = a(e - \cosh E)$, $\eta = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E$ oraz $\dot{E} = na/r$, wyprowadzić równanie Keplera dla orbit hiperbolicznych $M = e \sinh E - E$.
6. Wyprowadzić równanie Barkera $D^3/6 + D/2 = n(t - t_p)$ wykorzystując definicję $D = \text{tg}(f/2)$, całkę pól $\dot{f} = (\sqrt{\mu p})/r^2$ i równanie stożkowej $r = p/(1 + e \cos f)$.
7. Ze związków $r \cos f = a(e - \cosh E)$, $r \sin f = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E$ wyprowadzić zakres zmian anomalii prawdziwej w ruchu hiperbolicznym

$$f_{\max} = 2 \arctg \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}.$$

8. Przekształcić równania ruchu barycentrycznego

$$\ddot{r}_1^* = \frac{k^2 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad \ddot{r}_2^* = -\frac{k^2 m_1}{r^3} \vec{r},$$

do postaci rozseparowanej $\ddot{r}_i^* = -\mu_i (r_i^*)^{-3} \vec{r}_i^*$ i podać wyrażenia dla μ_1 i μ_2 .

9. Pokazać, że $V^* = -\mu/r$ jest potencjałem dla zagadnienia względnego dwóch ciał $\ddot{\vec{r}} = -\mu r^{-3} \vec{r}$.
10. Z równań ruchu $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, $\dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3} \vec{r} + \vec{P}$, oraz całki siły żywej $h = v^2/2 - \mu/r = -\mu/(2a)$ wyprowadzić równanie Gaussa $\dot{a} = (2a^2/\mu) \vec{P} \cdot \vec{v}$.

III. Wnioski

1. Jakie wnioski wynikają z całek środka masy (układ barycentryczny, związki między ruchem względnym i barycentrycznym)?
2. Jakie własności ruchu wynikają z całki siły żywej $h = v^2/2 - \mu/r$?
3. Jakie własności ruchu wynikają z całki momentu pędu $\vec{G} = \vec{r} \times \vec{v}$?
4. Jakie własności ruchu wynikają z całki Laplace'a $\vec{e} = (\vec{v} \times \vec{G})/\mu - \hat{r}$ gdy $G \neq 0$?
5. Jakie własności ruchu wynikają z całki Laplace'a $\vec{e} = (\vec{v} \times \vec{G})/\mu - \hat{r}$ gdy $G = 0$?

6. Jak zmienia się różnica między anomalią mimośrodową i średnią podczas ruchu w świetle równania Keplera $M = E - e \sin E$?
7. Jak hiperboliczna wartość mimośrodu $e > 1$ wpływa na zachowanie odległości $r = p/(1 + e \cos f)$, anomalii prawdziwej f i prędkości $v =$ w porównaniu z przypadkiem eliptycznym ($e < 1$) ?
8. Kiedy nie można stosować macierzy orientacji w postaci wektorowej $\mathbf{N} = \left(\hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{B}} | \hat{\mathbf{G}} \right)_{xyz}$, a kiedy w postaci zależnej od kątów Eulera $\mathbf{N} = \mathbf{R}_3(-\Omega) \mathbf{R}_1(-I) \mathbf{R}_3(-\omega)$?
9. Jakie wnioski wypływają z równań Gaussa

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r \cos(f + \omega)}{\mu p} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{P}$$

i

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(f + \omega)}{\sin I \mu p} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{P}$$

jeśli chodzi o wpływ kierunku siły \vec{P} i miejsca jej zadziałania na orbicie na zmianę płaszczyzny orbity ?

10. Porównać elementy orbit barycentrycznych i orbity względnej w zagadnieniu dwóch ciał o równej masie ($m_1 = m_2$).