

WYKŁADY 14-15
Kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał

3.3 Kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał

W sytuacji, gdy zagadnienie trzech ciał jest niecałkowalne warto rozpatrzyć skromniejszy przypadek, dość często spotykany w praktyce, gdy masa m_3 jest na tyle mniejsza od pozostałych, że praktycznie nie wpływa na ich ruch. Skoro zaniedbujemy masę m_3 , to masy m_1 i m_2 poruszają się po orbitach keplerowskich względem ich barycentrum. Tak zdefiniowane zagadnienie nazywamy **ograniczonym zagadnieniem trzech ciał**. Wbrew nazwie jest to oczywiście zagadnienie ruchu jednego ciała w zadanym polu grawitacyjnym.

Ograniczone zagadnienie dwóch ciał upraszcza się na kilka sposobów:

1. Można przyjąć, że ciało m_3 porusza się w płaszczyźnie orbitalnej mas m_1 i m_2 . Powstaje wtedy **płaskie ograniczone zagadnienie trzech ciał**.
2. Zakładając, że masy m_1 i m_2 poruszają się po orbitach kołowych otrzymujemy **kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał**.

Oba uproszczenia można połączyć, co prowadzi do **płaskiego kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał** o dwóch stopniach swobody.

Wprowadźmy układ współrzędnych, którego środek znajduje się w barycentrum B mas m_1 i m_2 (por. Rysunek 3.2). Oś Bx przechodzi przez masy m_1 i m_2 . Zakładamy, że

$$m_1 \geq m_2$$

a wtedy oś Bx skierowana jest od B do m_2 . Oś Bz uzgadniamy z momentem pędu mas m_1 i m_2 , zaś oś By dobieramy tak, aby powstał prawoskrętny układ kartezjański. Jeśli masy m_1 i m_2 poruszają się po orbitach kołowych względem barycentrum to znaczy, że znajdują się zawsze w stałej odległości wzajemnej Δ i układ współrzędnych obraca się jednostajnie wokół osi Bz z prędkością kątową

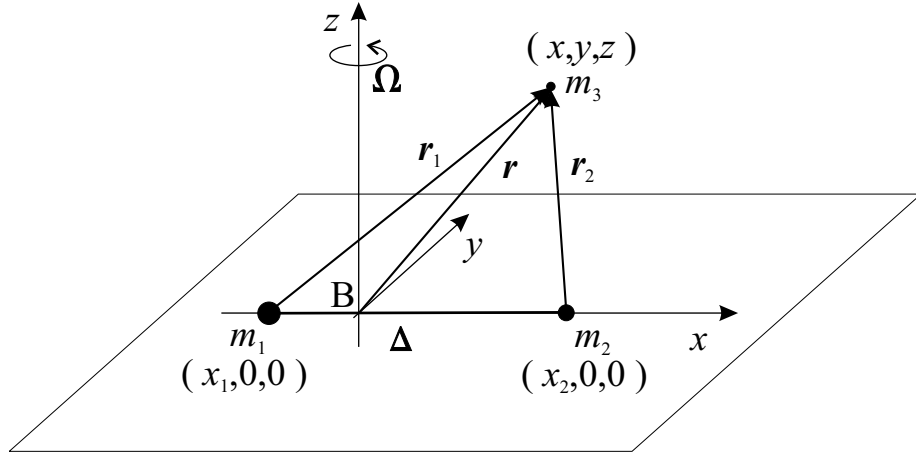
$$\Omega = k \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{\Delta^3}}, \quad (3.4)$$

wynikającą z III prawa Keplera. W obracającym się jednostajnie układzie współrzędnych obie masy spoczywają a więc wytwarzane przez nie pole grawitacyjne przestaje zależeć jawnie od czasu.

3.3.1 Całka Jacobiego

Rozpatrujemy ruch cząstki o zaniedbywalnej masie w potencjale

$$V = -\frac{k^2 m_1}{r_1} - \frac{k^2 m_2}{r_2}.$$



Rysunek 3.2: Układ współrzędnych i geometria ograniczonego zagadnienia trzech ciał.

Jest to energia potencjalna na jednostkę masy. Jak wiemy z Przykładu 1.8, funkcja Hamiltona w układzie obracających się osi z wyżej wypisanym potencjałem ma postać (1.162)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \Omega (yX - xY) - \frac{k^2 m_1}{r_1} - \frac{k^2 m_2}{r_2}. \quad (3.5)$$

Zauważmy, że odległości masy m_3 od obu pozostałych mas

$$r_1 = \|\mathbf{r} - (x_1, 0, 0)^T\| = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \|\mathbf{r} - (x_2, 0, 0)^T\| = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2},$$

nie zależą jawnie od czasu, gdyż położenie obu mas jest stałe. W tej sytuacji, skoro

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0,$$

mamy w świetle Twierdzenia 1.2 całkę ruchu $\mathcal{H} = \text{const.}$ czyli, oznaczając $\mu_i = k^2 m_i$,

$$\frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \Omega (yX - xY) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} = -\frac{1}{2} C. \quad (3.6)$$

Stała ruchu C nazywana jest stałą Jacobiego, zaś równanie (3.6) można nazwać całką Jacobiego, choć właściwie nazwa ta jest stosowana do przekształconej postaci, którą podamy niżej.

W niektórych zastosowaniach wygodniej jest używać całki Jacobiego (3.6) w postaci jawnie zależnej od prędkości. Z równań ruchu Hamiltona

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = X + \Omega y,$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} = Y - \Omega x, \\ \dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z} = Z,\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}X &= \dot{x} - \Omega y, \\ Y &= \dot{y} + \Omega x, \\ Z &= \dot{z}.\end{aligned}$$

Podstawiamy pędy do całki (3.6) i otrzymujemy całkę Jacobiego w tradycyjnej postaci

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \Omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{2\mu_1}{r_1} - \frac{2\mu_2}{r_2} + C = 0. \quad (3.7)$$

Całka Jacobiego jest jedyną całką ruchu w ograniczonym kołowym (tylko kołowym !) zagadnieniu trzech ciał. Oznacza to oczywiście niecałkowalność tego zagadnienia i to nawet w przypadku płaskim.

3.3.2 Powierzchnie i krzywe zerowej prędkości

Zauważmy, że kwadrat prędkości $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ w obracającym się układzie współrzędnych nigdy nie może być liczbą ujemną. A zatem, jeśli wstawimy $v^2 = 0$ w całce Jacobiego (3.7), otrzymamy równanie granicznej powierzchni oddzielającej dopuszczalne obszary ruchu od fizycznie niemożliwych

$$\Omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{2\mu_1}{r_1} + \frac{2\mu_2}{r_2} = C. \quad (3.8)$$

Wprowadzamy nowe jednostki czasu, odległości i masy. Jednostką długości będzie promień orbity mas m_1 i m_2 czyli Δ . A więc, w nowych jednostkach, $\Delta = 1$. Jako jednostkę masy przyjmujemy sumę mas $m_1 + m_2$, natomiast jednostkę czasu dobierzemy tak, aby stała Gaussa $k = 1$. Z III prawa Keplera wynika, że prędkość obrotu układu współrzędnych (ruch średni mas m_1 i m_2) jest w nowych jednostkach także równa 1, gdyż

$$\Omega = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_2)}{\Delta^3}} = 1.$$

Skoro ustaliliśmy wartość sumy mas, to wystarczy teraz wprowadzić jeden bezwymiarowy parametr

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.9)$$

Ponieważ w myśl konwencji $m_1 \geq m_2$, to $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$.

Równanie (3.8) przyjmuje w nowych (tzw. „bezwymiarowych”) jednostkach prostszą postać

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C, \quad (3.10)$$

gdzie

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2},$$

ponieważ masa m_1 ma teraz współrzędną $x_1 = -\mu$, zaś masa m_2 ma $x_2 = 1 - \mu$. Zależy ono już tylko od dwóch parametrów: stałej Jacobiego C i stosunku mas μ . Tak więc odpowiedni dobór jednostek odległości, masy i czasu pozwolił na wyrugowanie trzech parametrów z zagadnienia.

Rodzina powierzchni zerowej prędkości w przestrzeni zwana jest czasami powierzchniami Roche'a. Krzywe Hilla to odpowiednik powierzchni Roche'a w zagadnieniu płaskim $z = \dot{z} = 0$. Ich kształt możemy wywnioskować, przecinając powierzchnie Roche'a płaszczyzną $z = 0$. Punkty Lagrange'a powstają w miejscach, gdzie dwie krzywe Hilla mają punkt styczności (L_1 – między masami m_1 i m_2 , L_2 – na prawo od masy m_2 , L_3 – na lewo od masy m_1) lub w miejscach, gdzie krzywa Hilla ulega ściągnięciu do punktu (L_4, L_5 – w wierzchołkach trójkąta równobocznego o podstawie $m_1 m_2$).

ĆWICZENIA

Zadanie 14.1 Sprawdź równoważność całek (3.6) i (3.7).

Zadanie 14.2 Jaka jest minimalna wartość stałej Jacobiego w zagadnieniu płaskim i przestrzennym? Jaka jest wartość stałej Jacobiego w punktach Lagrange'a L_4 i L_5 ?

Zadanie 14.3 Przyjmując $\mu = 0.5$ i $\mu = 0.1$, użyj funkcji `plot::contour` do wykreślenia stałej Jacobiego C jako funkcji zmiennych x, y w zagadnieniu płaskim z zerową prędkością. Jaki jest związek między krzywymi Hilla a tym wykresem?

Zadanie 14.4 Użyj funkcji `plot::implicit` do wykreślenia rodziny krzywych Hilla dla $\mu = 0.5$ i $\mu = 0.1$.

Zadanie 14.5 Dla względnego zagadnienia **dwóch ciał** z parametrem grawitacyjnym $\mu = 1$ wyrażonego w zmiennych Hilla-Whittakera znajdź wzór dla krzywych zerowej prędkości radialnej R przy zadanej wartości momentu pędu Θ i energii $E = \mathcal{H}$. Jak należy interpretować te krzywe?

Zadanie 15.5 Komety w Obłoku Oorta podlegają nie tylko przyciąganiu Słońca, lecz również pływom dysku galaktycznego. Hamiltonian tego zagadnienia dla $\mu = 1$ ma postać

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} z^2, \quad (22)$$

gdzie $\varepsilon = 2.6 \times 10^{-3}$. Sporządź wykres dopuszczalnych obszarów ruchu na płaszczyźnie (ρ, z) dla kilku przykładowych wartości $\mathcal{H}$ (dodatnich i ujemnych).

Uwaga: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; jednostką odległości jest 10^4 AU.