WYKŁAD 7
Zmienne działanie-kąt. Rozszerzenie kanoniczne transformacji punktowej. Ruch w obracającym się układzie współrzędnych.

Przykład 1.7 – Zmienne działanie-kąt dla oscylatora harmonicznego (transformacja Poincaré)

Rozpatrzmy Hamiltonian oscylatora harmonicznego

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\left(X^2 + \omega^2 x^2\right). \tag{1.149}$$

Transformacja

$$x = \sqrt{\frac{2L}{\omega}}\,\sin\ell, \quad X = \sqrt{2L\omega}\,\cos\ell. \tag{1.150}$$

jest kanoniczna i nowy hamiltonian

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}(x(\ell,L), X(\ell,L)) = \omega L, \tag{1.151}$$

nie zależy od kąta ℓ a tylko od pędu L. Zmienne, dla których hamiltonian zależy jedynie od pędów nazywamy zmiennymi typu działanie-kąt. Znalezienie takich zmiennych jest równoznaczne z rozwiązaniem równań ruchu.

1.6.2 Rozszerzenie kanoniczne transformacji punktowej

Przyjmijmy za punkt wyjścia zmienne kanoniczne $\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q})$ dla układu z funkcją Hamiltona $\mathcal{H}$. Transformacja punktowa polega na wprowadzeniu nowych współrzędnych $\boldsymbol{p}$, zależnych jedynie od starych współrzędnych $\boldsymbol{q}$ i od czasu

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, t). \tag{1.154}$$

Rozszerzenie kanoniczne transformacji punktowej (1.154) to znalezienie pędów $\boldsymbol{P}$ sprzężonych kanonicznie z nowymi współrzędnymi oraz nowego hamiltonianu $\mathcal{K}$.

Rozszerzenie kanoniczne wykonujemy w oparciu o warunek

$$-\mathcal{H}\,dt + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{q} = -\mathcal{K}\,dt + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{p}. \tag{1.155}$$

Przykład 1.8 – Ruch w układzie jednostajnie rotujących osi

Rozpatrzmy często spotykaną w mechanice systuację, gdy chcemy badać ruch w jednostajnie obracającym się układzie współrzędnych. Punktem wyjścia będa położenia i pędy (na jednostkę masy) w kartezjańskim układzie inercjalnym $Ox_0y_0z_0$

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{R}_0),$$

gdzie, jak zwykle,

$$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{R}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^{\mathrm{T}}.$$

Funkcja Hamiltona w tym układzie ma postać

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_0 + V(\boldsymbol{r}_0, t), \tag{1.156}$$

gdzie V oznacza dowolny potencjał (na jednostkę masy).

Wprowadźmy teraz drugi układ współrzędnych $Oxyz$ o tym samym środku O, który obraca się jednostajnie wokół osi $Oz_0 = Oz$, z prędkością kątową Ω. Chcemy, aby nowe zmienne położenia opisywały pozycję punktu materialnego w układzie rotującym, a więc oznaczając przez $\mathbf{M}_3(\alpha)$ macierz obrotu o kąt α wokół osi Oz, zadajemy transformację w postaci

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{M}_3(\Omega t)\,\boldsymbol{r}_0, \tag{1.157}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega\,t) & \sin(\Omega\,t) & 0 \\ -\sin(\Omega\,t) & \cos(\Omega\,t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Warunek (1.155) przyjmuje w naszym zagadnieniu postać

$$-\mathcal{H}\,dt + \boldsymbol{R}_0^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{r}_0 = -\mathcal{K}\,dt + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{r}. \tag{1.158}$$

Różniczkujemy (1.157), otrzymując

$$d\boldsymbol{r} = \mathbf{M}_3'(\Omega\,t)\,\boldsymbol{r}_0\,\Omega\,dt + \mathbf{M}_3(\Omega\,t)\,d\boldsymbol{r}_0, \tag{1.159}$$

gdzie $\mathbf{M}_3'$ oznacza pochodną macierzy obrotu względem jej argumentu, to znaczy

$$\mathbf{M}_3'(\alpha) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.160}$$

Podstawiając (1.159) do warunku (1.158), otrzymujemy

$$\boldsymbol{R} = \mathbf{M}_3(\Omega t)\,\boldsymbol{R}_0, \tag{1.161}$$

oraz

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \Omega\,\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{M}_3'(\Omega\,t)\boldsymbol{r}_0,$$

a więc

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} - \Omega\,(xY - yX)\,.$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie to nic innego jak składowa z wektora momentu pędu.

Końcowa postać funkcji Hamiltona w rotującym układzie współrzędnych

$$\mathcal{K} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} - \Omega\,(xY - yX) + V(\boldsymbol{r}, t). \tag{1.162}$$

ĆWICZENIA

Zadanie 7.1 Zaproponuj transformację $(x,y,X,Y) \leftrightarrow (\ell,g,L,G)$, wprowadzającą zmienne działanie-kąt dla dwuwymiarowego oscylatora

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(X^2 + \omega^2 x^2\right) + \frac{1}{2}\left(Y^2 + \omega^2 y^2\right), \tag{16}$$

tak, aby nowy hamiltonian miał postać

$$\mathcal{K} = \omega\,(L+G). \tag{17}$$

Sprawdź kanoniczność tej transformacji wyliczając macierz nawiasów Poissona.

Zadanie 7.2 Dla oscylatora z Zadania 7.1 wykonaj transformację punktową $(\ell,g,L,G) \leftrightarrow (\phi,\psi,\Phi,\Psi)$, w wyniku której nowe pędy mają postać

$$\Phi = L + G, \quad \Psi = L - G.$$

Wypisz nowy hamiltonian i równania ruchu w tych zmiennych.

Zadanie 7.3 Rozszerzając kanonicznie transformację punktową znajdź hamiltonian z dowolnym potencjałem V dla zmiennych kartezjańskich, opisujący ruch w układzie współrzędnych, który obraca się wokół osi Oz z dowolnie zmienną w czasie prędkością kątową $\Omega(t)$

Zadanie 7.4 Wykorzystując wyniki zadań 5.2 i 5.3, podaj funkcję Hamiltona opisującą ruch w zmiennych biegunowych, gdy układ obraca się ze stałą prędkością kątową Ω wokół osi Oz. Sformułuj warunki, dla których punkt spoczywa w tym układzie, jeśli potencjał jest tylko funkcją zmiennych (r,λ,φ).