WYKŁAD 6
Macierze symplektyczne. Nawiasy Poissona. Transformacja kanoniczna.

1.5.2 Macierze symplektyczne

Niech układ ma M stopni swobody. Wprowadzamy wektor stanu $\boldsymbol{\zeta}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta} &= (q_1, \ldots, q_M, Q_1, \ldots, Q_M)^{\mathrm{T}}, \\ \nabla &\equiv \left(\tfrac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial q_M}, \tfrac{\partial}{\partial Q_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial Q_M}\right)^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{1.127}$$

Możemy wtedy zapisać równania kanoniczne ruchu (1.120) w zwartej postaci

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J}\, \nabla \mathcal{H}. \tag{1.128}$$

$\mathbf{J}$ oznacza **standardową macierz symplektyczną** $2M \times 2M$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_M & \mathbf{E}_M \\ -\mathbf{E}_M & \mathbf{0}_M \end{pmatrix}, \tag{1.129}$$

gdzie $\mathbf{E}_M$ oznacza jednostkową macierz diagonalną $M \times M$. Właściwości:

$$\mathbf{J}^2 \equiv \mathbf{J}\,\mathbf{J} = -\mathbf{E}_{2M}, \quad \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} = \mathbf{E}_{2M}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{J}. \tag{1.130}$$

Macierzą symplektyczną nazywamy każdą macierz kwadratową $\mathbf{S}$ dla której zachodzi

$$\mathbf{S}\,\mathbf{J}\,\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}. \tag{1.131}$$

Warunek (1.131) można też zapisać w równoważnej postaci

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{J}\,\mathbf{S} = \mathbf{J}.$$

Wyznacznik macierzy symplektycznej jest równy 1

$$\det \mathbf{S} = 1. \tag{1.132}$$

Macierze symplektyczne tworzą grupę: iloczyn dwóch macierzy symplektycznych jest również macierzą symplektyczną, istnieje element neutralny w postaci macierzy $\mathbf{E}$ oraz macierz odwrotna $\mathbf{S}^{-1}$ zawsze istnieje (wyznacznik $\mathbf{S}$ jest różny od zera) i również jest symplektyczna.

1.5.3 Nawiasy Poissona

Nawiasem Poissona dwóch funkcji F i G nazywamy operator różniczkowy $\{F, G\}$ zdefiniowany jako

$$\{F, G\} = (\nabla F)^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\,\nabla G = \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial Q_i} - \frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \tag{1.133}$$

Tam, gdzie będzie to ważne, dodawać będziemy do nawiasu Poissona indeks informujący o zmiennych kanonicznych względem których liczone są pochodne cząstkowe. Na przykład we wzorze (1.133) mamy $\{F, G\}_{\boldsymbol{\zeta}}$.

Wprowadzając nawias Poissona możemy zapisać równania kanoniczne (1.128) w jeszcze prostszej postaci

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \{\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{H}\}, \tag{1.135}$$

a dla dowolnej funkcji $F(\boldsymbol{\zeta}, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \{F, \mathcal{H}\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1.136}$$

Nawias Poissona posiada zarówno właściwości typowe dla każdego liniowego operatora różniczkowego (liniowość i działanie na iloczyn) jak i własności zbliżone do iloczynu wektorowego (antysymetria, tożsamość Jacobiego).

1. Antysymetryczność:
$$\{F, G\} = -\{G, F\}. \tag{1.137}$$

2. Linowość. Dla dowolnych funkcji F, G, H i stałych α,β zachodzi,
$$\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, G\} + \beta\{G, H\}. \tag{1.138}$$

3. Działanie na iloczyn funkcji:
$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}. \tag{1.139}$$

4. Tożsamość Jacobiego:
$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \tag{1.140}$$

   Dla porównania, dowolne trzy wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ spełniają
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \mathbf{0}.$$

1.6 Transformacje kanoniczne

Transformację

$$\Phi : \quad (\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{H}(\boldsymbol{\zeta}, t)) \to (\boldsymbol{\eta}, \mathcal{K}(\boldsymbol{\eta}, t))\,, \tag{1.141}$$

nazywamy kanoniczną, jeśli nowe zmienne $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P})$ spełniają równania ruchu Hamiltona z nowym hamiltonianem $\mathcal{K}$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\,\nabla_{\boldsymbol{\eta}}\mathcal{K} = \mathbf{J}\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{P}} \end{pmatrix}. \tag{1.142}$$

Mówiąc krótko: transformacja Φ jest kanoniczna jeśli zachowuje postać kanoniczną równań ruchu.

1.6.1 Warunek dostateczny kanoniczności transformacji

Warunek konieczny i dostateczny kanoniczności transformacji można sformułować następująco:

> Transformacja $\boldsymbol{\zeta} \leftrightarrow \boldsymbol{\eta}$ jest kanoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz Jacobiego $\mathbf{U} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$ jest macierzą symplektyczną.

Nowy hamiltonian $\mathcal{K}$ różni sie od pierwotnego $\mathcal{H}$ o tak zwaną resztę transformacji $\mathcal{F}$, tzn.

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\eta}, t) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}, t), t) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}, t), \tag{1.143}$$

przy czym:

- Dla transformacji zachowawczej $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\zeta})$ reszta transformacji $\mathcal{F} = 0$.
- Dla transformacji jawnie zależnej od czasu reszta transformacji musi spełniać równania
$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{F} = \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}. \tag{1.144}$$

Nawiasy Poissona a transformacja kanoniczna

> Jeśli $\boldsymbol{\zeta} \leftrightarrow \boldsymbol{\eta}$ jest transformacją kanoniczną to dla dowolnych dwóch funkcji F, G
>
> $$\{F, G\}_{\boldsymbol{\zeta}} = \{F, G\}_{\boldsymbol{\eta}}. \tag{1.145}$$
>
> Innymi słowy, nawias Poissona jest niezmiennikiem transformacji kanonicznej.

W szczególności, jeśli wyznaczymy nawiasy Poissona zmiennych $\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q})$ względem $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P})$, to

$$\{q_i, Q_i\}_{\boldsymbol{\eta}} = \{q_i, Q_i\}_{\boldsymbol{\zeta}} = 1, \tag{1.146}$$

zaś wszystkie pozostałe nawiasy będą równe zero.

ĆWICZENIA

Zadanie 6.1 Udowodnij, że warunki (1.131) i $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{J}\,\mathbf{S} = \mathbf{J}$ są równoważne.

Zadanie 6.2 Udowodnij, że odwrotność macierzy symplektycznej $\mathbf{S}$ dana jest wzorem

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{J}, \tag{15}$$

oraz, że macierz $\mathbf{S}^{-1}$ jest także macierzą symplektyczną.

Zadanie 6.3 Zdefiniuj w programie MuPad funkcje generujące standardową macierz symplektyczną o zadanym rozmiarze i nawias Poissona względem dowolnego zestawu zmiennych kanonicznych. Sprawdź, że dla dowolonego zestawu zmiennych kanonicznych $\boldsymbol{\zeta}$, macierz nawiasów Poissona $\mathbf{M}$ o elementach $M_{ij} = \{ \zeta_i, \zeta_j \}$ jest standardową macierzą symplektyczną ($\mathbf{M} = \mathbf{J}$).

Zadanie 6.4 Załóżmy, że wykonana została transfromacja zmiennych polegająca na pomnożeniu położeń przez stałą a, zaś pędów przez stałą b. Sprawdź macierz Jacobiego tej transformacji i ustal związek między a i b dzięki któremu transformacja będzie kanoniczna.

Zadanie 6.5 Niech funkcje F i G będą całkami ruchu ($\dot{F} = \dot{G} = 0$) układu z pewną funkcją Hamiltona $\mathcal{H}$. Udowodnij, że jeśli $\{F, G\} \neq 0$, to $E = \{F, G\}$ jest także całką ruchu.

Zadanie 6.6 Na podstawie wyniku Zadania 6.5 udowodnij, że jeśli dowolne dwie składowe momentu pędu są całkami ruchu, to trzecia musi także być stała. Wskazówka: wykorzystaj definicję momentu pędu w kanonicznych zmiennych kartezjańskich $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R}$, gdzie $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{R} = (X, Y, Z)^{\mathrm{T}}$.