

Matematyczne podstawy mechaniki nieba pytania egzaminacyjne 2025

1. Formalizm newtonowski: przedstawić równania ruchu układu N ciał z siłami jawnie zależnymi od czasu jako układ $6N + 1$ równań pierwszego rzędu bez jawnej zależności od czasu.
2. Metoda uziemienniania stałych: przedstawić myśl przewodnią metody i wyprowadzić równania dla zmian stałych ruchu wynikające z różniczkowania całek pierwszych.
3. Podać definicję elementów oskulacyjnych. Na czym polega specyfika uziemienniania anomalii średniej epoki odniesienia w odróżnieniu od pozostałych elementów ?
4. Wyprowadzić równania dla uziemiennionych stałych h , $\vec{G}$, $\vec{e}$ przy dowolnej sile zaburzającej $\vec{P}$.
5. Zastosować równania Gaussa do analizy wpływu oporu ośrodka na względne zagadnienie dwóch ciał.
6. Forma symplektyczna i jej związek z macierzami symplektycznymi.
7. Podstawowe pojęcia formalizmu kanonicznego i macierzowa postać równań kanonicznych.
8. Definicja i własności kanonicznego nawiasu Poissona.
9. Kanoniczne sformułowanie drugiej zasady dynamiki dla układu K ciał (zmienne, hamiltonian, równania ruchu).
10. Co to jest transformacja kanoniczna, jaki jest jej warunek dostateczny i jak wiąże się on z zachowaniem nawiasów Poissona.
11. Podać warunek transformacji Mathieu i zastosować go rozszerzenia kanonicznego liniowej transformacji punktowej (Twierdzenie 5).
12. Podać definicję zmiennych Hilla-Whittakera i postać funkcji Hamiltona zagadnienia względnego dwóch ciał w tych zmiennych. Zinterpretować poszczególne wyrazy hamiltonianu i wskazać zmienne cykliczne oraz związane z nimi całki ruchu.

13. Jak wygląda transformacja kanoniczna opisana funkcją tworzącą $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$:
podać związki między zmiennymi $(\vec{q}, \vec{Q})$ a $(\vec{p}, \vec{P})$ oraz funkcjami Hamiltona $\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ i $\mathcal{K}(\vec{p}, \vec{P}, t)$. Zilustrować na przykładzie transformacji tożsamościowej.
14. Zmienne Delaunaya: definicja przy pomocy elementów keplerowskich, postać funkcji Hamiltona i równania ruchu w zagadnieniu 2 ciał, uzasadnić, że są to zmienne kąt-działanie tego zagadnienia.
15. Wyprowadzić dwa dowolnie wybrane równania planetarne Lagrange'a: jedno z trójki $(\dot{a}, \dot{e}, \dot{I})$ i jedno z $(\dot{M}, \dot{\omega}, \dot{\Omega})$.

Dodatek: Równania Gaussa

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \vec{P} \cdot \vec{v} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[R e \sin f + T \frac{p}{r} \right] = \frac{2v}{n^2 a} S, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{1}{\mu a e} \left[(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r} + (ap - r^2) \vec{v} \right] \cdot \vec{P} \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a} [R \sin f + T (\cos f + \cos E)] \\ &= \frac{1}{v} \left[S \frac{2p}{r} \cos E + N \sqrt{1-e^2} \sin E \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{I} = \frac{r \cos(f + \omega)}{\mu p} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{P} = \frac{r \cos(f + \omega)}{\sqrt{\mu p}} B, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{r}{\mu p e} \left[\frac{\sqrt{\mu p}}{r} (\cos E + e) \vec{r} - (p + r) \sin f \vec{v} \right] \cdot \vec{P} - c\dot{\Omega} \\ &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-R \cos f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] - c\dot{\Omega} \\ &= \frac{1}{e v} [2S \sin f - N(e + \cos E)] - c\dot{\Omega}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(f + \omega)}{s \mu p} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{P} = \frac{r \sin(f + \omega)}{s \sqrt{\mu p}} B, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{M} &= n - \frac{1}{n a^2} \left[2 \vec{P} \cdot \vec{r} + \sqrt{\mu p} (\dot{\omega} + c\dot{\Omega}) \right] \\ &= n - \frac{1}{n a^2 e} [R(2re - p \cos f) + T(r + p) \sin f] \\ &= n - \frac{\sqrt{1-e^2}}{v e} \left[N(\cos f - e) - S \left(1 + \frac{2re^2}{p} \right) \sin f \right]. \end{aligned} \quad (6)$$