

Sławomir Breiter

Matematyczne podstawy mechaniki nieba

I r. Astron. (II st.)

wersja 7.04.2025

Rozdział 1

Równania ruchu w formalizmie newtonowskim

Skoro mechanika nieba jest nauką o ruchu ciał niebieskich, to umiejętność formułowania równań ruchu ma znaczenie podstawowe. Zaczniemy od przypomnienia klasycznego formalizmu Newtona, który nakłada najmniej ograniczeń na postać sił działających w rozpatrywanym układzie. Skupimy się na problemach dynamiki punktów materialnych, pozostawiając na uboczu kwestię ruchu obrotowego bryły sztywnej.

1.1 Formalizm newtonowski

Najbardziej klasyczne podejście do mechaniki korzysta z równań ruchu w postaci wprowadzonej przez Newtona w trzech zasadach dynamiki. Przez formalizm newtonowski rozumiemy rozpatrywanie ruchu w kategoriach takich pojęć podstawowych jak układ inercjalny (I zasada) oraz siła i przyspieszenie (II zasada) opisywane w „naturalnych” zmiennych kartezjańskich. Oczywiście, można w ramach formalizmu newtonowskiego wprowadzać inne układy zmiennych, ale przejście do nich wymaga najpierw ich zdefiniowania jako funkcji kartezjańskich położenia i prędkości.

Jeśli więc mamy układ N punktów materialnych, to – w świetle drugiej zasady dynamiki – jego równania ruchu mają postać

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

gdzie siła $\mathbf{F}_i$ może zależeć od położenia $\mathbf{r}_i$ i prędkości $\dot{\mathbf{r}}_i$ wszystkich ciał oraz jawnie od czasu i – co najważniejsze – nie musi spełniać żadnych dodatkowych założeń. W newtonowskiej mechanice klasycznej siła nie zależy od

pochodnych $\mathbf{r}_i$ rzędu wyższego niż pierwszy. Przykładem zastosowania formalizmu newtonowskiego mogą być znane z *Wstępu do mechaniki nieba* równania ruchu zagadnienia dwóch ciał i przeprowadzone następnie całkowanie tego zagadnienia.

Stosując pojęcie pędu i -tej cząstki $\mathbf{p}_i$, możemy zapisać równania (1.1) w postaci

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1/m_1, \dots, \mathbf{p}_N/m_N, t),\end{aligned}\quad (1.2)$$

gdzie pierwsze równanie pośrednio definiuje pęd jako iloczyn masy i prędkości $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$, zaś drugie ustala równość między prędkością zmian pędu a działającą siłą. Jedną z zalet układu (1.2) jest to, że daje on przedsmak równań kanonicznych. W ramach formalizmu Newtona ważniejsze jednak jest to, że w ten sposób sprowadzamy równania ruchu do standardowej postaci z teorii równań różniczkowych, otrzymując zamiast $3N$ równań drugiego rzędu – układ $6N$ równań rzędu pierwszego

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}(\mathbf{w}, t), \quad (1.3)$$

gdzie **wektor stanu** ma składowe

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \dots \\ \mathbf{r}_N \\ \mathbf{p}_1 \\ \dots \\ \mathbf{p}_N \end{pmatrix} \equiv \text{col}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N),$$

a prawe strony równań ruchu to

$$\mathbf{F} = \text{col}\left(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1}, \dots, \frac{\mathbf{p}_N}{m_N}, \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t), \dots, \mathbf{F}_N(\mathbf{w}, t)\right).$$

Często jednak wygodniej jest posługiwać się prędkościami $\mathbf{v}_i$ zamiast pędów. Używamy wtedy zamiast (1.3) układu

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (1.4)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\rho} = \text{col}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N),$$

oraz

$$\mathbf{G} = \text{col} \left(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \frac{\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\rho}, t)}{m_1}, \dots, \frac{\mathbf{F}_N(\boldsymbol{\rho}, t)}{m_N} \right).$$

Wbrew utartym schematom, układ z jawną zależnością siły od czasu jest tylko **szczególnym przypadkiem** układów zachowawczych (bez jawnej zależności od czasu). Wystarczy wprowadzić **rozszerzony wektor stanu** o $6N + 1$ składowych $\mathbf{w}^* = \text{col}(u, \mathbf{w})$, z dodatkową zmienną u oraz wektor prawych stron $\mathbf{F}^* = \text{col}(1, \mathbf{F})$ i mamy już równania zachowawcze

$$\dot{\mathbf{w}}^* = \mathbf{F}^*(\mathbf{w}^*), \quad (1.5)$$

z pierwszą składową

$$\dot{u} = 1,$$

czyli $u = t + \text{const}$. W prawych stronach równań nie występuje już czas t (zmienna niezależna układu), gdyż jego miejsce zajął „sobowtór” u , będący formalnie jedną ze zmiennych zależnych $\boldsymbol{\rho}$.

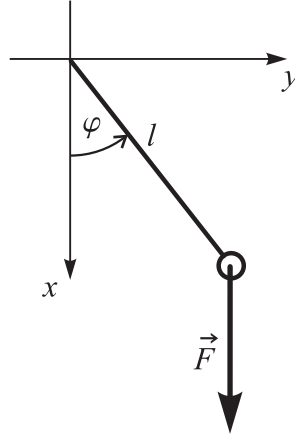
Jeśli równania ruchu tworzą układ równań różniczkowych rzędu $2M$ bez jawnej zależności od czasu, to mówimy, że układ ma M **stopni swobody**. Stopniem swobody nazwiemy każda parę współrzędnych położenie-pęd (lub położenie-prędkość), wymaganą do opisu ruchu. Jeśli rząd układu jest nieparzysty, a wiąże się to z usuwaniem jawnej zależności od czasu, mówimy żargonowo o połowie stopnia swobody (zmienna u nie ma stowarzyszonego pędu jako niezależnej zmiennej, gdyż jej prędkość jest z definicji stała i wynosi 1 niezależnie od warunków początkowych). I tak, układ opisany równaniami (1.5) posiada „ $3N$ i pół” stopnia swobody. Także w sytuacjach, gdy utrzymaliśmy jawną zależność od czasu i formalnie posługujemy się nadal układem rzędu $2M$, dorzucamy pół stopnia swobody, gdyż możliwe jest rozszerzenie wektora stanu do wymiaru $2M + 1$, nawet jeśli go nie wykonaliśmy.

Wspomniana wyżej dowolność siły sprawia, że formalizm newtonowski jest najogólniejszym sposobem analizy ruchu, dającym się zastosować we wszystkich zagadnieniach mechaniki klasycznej. Niestety, zaleta maksymalnej ogólności oznacza, że nie sposób powiedzieć niczego konkretnego o rozwiązaniach dowolnych równań ruchu w postaci Newtona, gdyż niewiele można powiedzieć o wszystkich możliwych zagadnieniach. Inną wadą jest żmudność przejścia od kartezjańskich położen i prędkości do bardziej dogodnych zmiennych; zilustrujemy to przykładem równań ruchu wahadła mate-

matycznego.

1.2 Wahadło matematyczne, oscylator harmoniczny i oscylator Duffinga

Rozpatrzmy równania ruchu Newtona dla płaskiego wahadła matematycznego o stałej masie m , zawieszonego na nieważkim pręcie o długości l w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g (Rys. 1.1). Co prawda łatwo jest napisać,



Rysunek 1.1: Wahadło matematyczne.

że dla $\mathbf{r} = (x, y)^T$ oraz $\mathbf{F} = (mg, 0)^T$ równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= g, \\ \ddot{y} &= 0,\end{aligned}\tag{1.6}$$

ale równania te są tylko punktem wyjścia do dalszej analizy, wymagającej uwzględnienia równania więzów

$$x^2 + y^2 = l^2.\tag{1.7}$$

Dopiero równanie (1.7) zawiera istotną wiadomość, że układ ma nie dwa, a tylko jeden stopień swobody. Ponieważ wahadło, jako formalny model matematyczny, pełni istotną rolę w mechanice nieba, poprowadźmy dalsze wyprowadzenie wprowadzając jako zmienną kąt φ , definiowany poprzez

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi.\tag{1.8}$$

Różniczkując równania (1.8) dochodzimy do

$$\dot{x} = -l \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

i dalej

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - l \ddot{\varphi} \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + l \ddot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Porównanie ich z równaniami (1.6) prowadzi do

$$-l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - l \ddot{\varphi} \sin \varphi = g, \quad (1.9)$$

$$-l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + l \ddot{\varphi} \cos \varphi = 0. \quad (1.10)$$

Należy teraz pomnożyć obie strony (1.9) przez $-l^{-1} \sin \varphi$ zaś (1.10) przez $l^{-1} \cos \varphi$ i dopiero teraz, dodając stronami, uzyskamy

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin \varphi, \quad (1.11)$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Równanie różniczkowe drugiego rzędu (1.11) można także przedstawić jako układ dwóch równań pierwszego rzędu: jeśli wprowadzimy prędkość kątową Φ , to mamy

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -\omega_0^2 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.12)$$

czyli $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho})$, gdzie

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)^T = (\varphi, \Phi)^T,$$

oraz

$$\mathbf{G} = (\rho_2, -\omega_0^2 \sin \rho_1)^T = (\Phi, -\omega_0^2 \sin \varphi)^T.$$

W przedstawionym tu przykładzie sytuację komplikowało pojawienie się więzów. Można wysunąć zastrzeżenie, że przecież w zagadnieniach ruchu ciał niebieskich nie pojawiają się więzy – trudno wyobrazić sobie planetę na sznurku. A jednak więzy mogą się zjawić nie tylko w postaci fizycznej. Każda całka ruchu

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}, t) = \text{const},$$

definiuje w istocie powierzchnię, na której ruch musi się odbywać, pełniąc rolę „matematycznego sznurka”. Wykorzystanie całek ruchu do obniżenia

liczby stopni swobody jest w formalizmie Newtona bardziej zawiłe niż w ramach formalizmu Lagrange’a czy Hamiltona.

Założmy teraz, że maksymalne wychylenie wahadła (w radianach) jest niewielkie. Rozwijając prawą stronę równania (1.11) w szereg potęgowy wzorem MacLaurina, mamy

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + O(\varphi^5).$$

Zaniedbując wyrazy rzędu φ^5 (lub mniejsze), sprowadzimy równania wahadła do postaci

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -\omega_0^2 \varphi + \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3,\end{aligned}\tag{1.13}$$

czyli

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi + \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3.$$

Układ ten nazywamy **oscylatorem Duffinga**.

Najdalej idące uproszczenie polega na przyjęciu $\sin \varphi \approx \varphi$, z błędem rzędu $O(\varphi^3)$. Równania ruchu wahadła sprowadzają się wtedy do równań oscylatora harmonicznego

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -\omega_0^2 \varphi,\end{aligned}\tag{1.14}$$

czyli

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi.$$

Układ ten posiada proste rozwiązanie ogólne

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= A \sin(\omega_0 t + \chi), \\ \Phi(t) &= A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \chi),\end{aligned}\tag{1.15}$$

zależne od dwóch stałych dowolnych: amplitudy A i fazy początkowej χ . Jest to w istocie rodzina rozwiązań – elips na płaszczyźnie fazowej (φ, Φ) . Rozwiązanie szczególne, czyli pojedynczą trajektorię na płaszczyźnie fazowej, otrzymamy zadając warunki początkowe w epoce t_0

$$\varphi_0 = \varphi(t_0), \quad \Phi_0 = \Phi(t_0),$$

i wyliczając z nich stałe dowolne A, χ .

Zarówno wahadło jak i oscylator Duffinga także posiadają rozwiązania ścisłe, zależne od dwóch stałych dowolnych, ale wymagają one wprowadzenia tak zwanych funkcji eliptycznych.

1.3 Metoda uziemienniania stałych

Pozostając nadal na poziomie ogólności formalizmu newtonowskiego, wprowadzimy teraz nowy, dość szczególny rodzaj zmiennych.

Z podstawowego kursu analizy matematycznej¹ można wynieść przekonanie, że **metoda uziemienniania stałych** jest metodą *rozwiązywania* równań różniczkowych zwyczajnych. Jest to prawdziwe, jeśli chodzi o równania liniowe niejednorodne, lecz w ogólnym przypadku równań nieliniowych metoda uziemienniania stałych jest jedynie sposobem *przekształcenia* równań różniczkowych do postaci, która czasem może uprościć dalsze kroki zmierzające do ich rozwiązania.

Aby nie wdawać się w zbędne uogólnienia, skoncentrujemy się na przypadku układu mechanicznego o M stopniach swobody. Oznaczając przez $\mathbf{r}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^M$ położenie i prędkość układu, możemy podać jego równania ruchu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{1.16}$$

Założmy, że układ z siłą (na jednostkę masy) $\mathbf{F}_0$ jest całkowny i potrafimy znaleźć jego rozwiązanie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{C}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{C}, t),\tag{1.17}$$

jawnie zależne od czasu t oraz od stałych dowolnych $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2M}$ wyznaczanych z warunków początkowych. Zauważmy, że po lewej stronie równości mamy wielkości fizyczne: położenie $\mathbf{r}$ i prędkość $\mathbf{v}$, natomiast po prawej – **funkcje** $\mathbf{r}(\mathbf{C}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{C}, t)$ czasu i stałych, które opisują zmiany położenia i prędkości. Zagadnienie (1.16) możemy nazwać **zagadnieniem definiującym**, a jego rozwiązanie (1.17) – **rozwiązaniem definiującym**.

Wprowadźmy teraz do układu (1.16) dodatkową siłę $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Istotą metody uziemienniania stałych jest przyjęcie, że mimo pojawienia się „zaburzenia” $\mathbf{P}$, będziemy nadal używać wzorów (1.17) wywodzących się z zagadnienia definiującego. Ponieważ utrzymujemy postać rozwiązania jako

¹np. A. Sołtysiak *Analiza matematyczna* rozdz. 9.

funkcji stałych dowolnych i czasu, musimy dopuścić możliwość, że dotychczasowe stałe dowolne $\mathbf{C}$ przestają być stałymi i przybierają postać nieznaną funkcji czasu $\mathbf{C}(t)$. W tej sytuacji, czeka nas wyprowadzenie równań różniczkowych opisujących ewolucję **uzmiennionych stałych** $\mathbf{C}(t)$, nazywanych także **stałymi oskulacyjnymi** (lub zmiennymi oskulacyjnymi).

Ogólna procedura zastąpienia równań (1.18) układem $2M$ równań dla $\dot{\mathbf{C}}$ wykorzystuje nawiasy Lagrange’a i można ją znaleźć w starszych podręcznikach mechaniki klasycznej lub mechaniki nieba. W praktyce jednak, wygodniej jest analizować każdy przypadek osobno i wykorzystać w maksymalnym stopniu jego specyfikę. Równania dla uzmiennionych stałych można wyprowadzać na dwa zasadnicze sposoby: wychodząc od rozwiązania definiującego (1.17) lub wykorzystując całki układu. To drugie podejście bywa bardziej atrakcyjne, a nie narzuca nam zasadniczych ograniczeń, gdyż metoda uzmienniania stałych wymaga, z założenia, całkowalnego zagadnienia definiującego. Zagadnienie całkowalne to takie, dla którego znamy wszystkie całki ruchu – w naszym przypadku $2M$ niezależnych całek

$$\Psi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = S_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, 2M, \quad (1.19)$$

co jest równoważne z możliwością podania ścisłego rozwiązania (1.17). Całkami ruchu nazywa się równie często równania (1.19) jak i same funkcje Ψ_i .

Całkom ruchu zagadnienia definiującego towarzyszą stałe ruchu S_i , które albo są wprost stałymi dowolnymi z rozwiązania definiującego, albo znamy związki między $\mathbf{S}$ i $\mathbf{C}$. Ze stałości całki ruchu wynika

$$\dot{S}_i = \dot{\Psi}_i = (D_{\mathbf{r}}\Psi_i) \mathbf{v} + (D_{\mathbf{v}}\Psi_i) \mathbf{F}_0 + D_t\Psi_i = 0, \quad (1.20)$$

gdzie skorzystaliśmy z reguł różniczkowania funkcji złożonej oraz z równań (1.16). Symbolem $D_{\mathbf{x}}$ oznaczamy będziemy transponowany gradient, tzn. jeśli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem kolumnowym, a $F(\mathbf{x})$ dowolną funkcją, to

$$D_{\mathbf{x}}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right). \quad (1.21)$$

W metodzie uzmienniania stałych, całki zagadnienia definiującego mogą przestać być stałe po wprowadzeniu dodatkowej siły $\mathbf{P}$. Zauważmy jednak, że jedynym źródłem zmienności stałych ruchu $\mathbf{S}$ staje się ta część pochodnej względem czasu, która zawiera $\mathbf{P}$, co upoważnia nas do sformułowania równań ruchu

$$\dot{S}_i = (D_{\mathbf{v}}\Psi_i) \mathbf{P}, \quad i = 1, \dots, 2M. \quad (1.22)$$

Wzór ten można stosować „na skróty” według reguły: różniczkujemy względem czasu tylko występujące w całkach $\mathbf{v}$ i zastępujemy $\dot{\mathbf{v}}$ siłą $\mathbf{P}$.

Jeśli $\mathbf{S} = \mathbf{C}$, to równania (1.22) są tymi, których szukaliśmy. W przeciwnym wypadku, musimy je uzupełnić znajomością związków między $\mathbf{S}$ i $\mathbf{C}$, które po zróżniczkowaniu prowadzą do

$$\dot{C}_i = (D_{\mathbf{S}} C_i) \dot{\mathbf{S}}, \quad i = 1, \dots, 2M, \quad (1.23)$$

czyli

$$\dot{\mathbf{C}} = (D_{\mathbf{S}} \mathbf{C}) (D_{\mathbf{v}} \Psi) \mathbf{P}.$$

Jeśli znamy tylko $\mathbf{S}(\mathbf{C})$, to będziemy musieli odwrócić macierz Jacobiego:

$$D_{\mathbf{S}} \mathbf{C} = (D_{\mathbf{C}} \mathbf{S})^{-1}.$$

Jest to dość prosty schemat, choć trzeba pamiętać, że prawe strony równań (1.23) muszą zostać wyrażone przy pomocy uzmiennionych stałych $\mathbf{C}$ za pośrednictwem rozwiązania definiującego (1.17). Jak widać, nawet zastosowanie całek ruchu nie uwalnia nas od wymogu znajomości jawnego rozwiązania.

Rozwiązanie układu (1.23) dostarczy nam $2M$ funkcji $C_i(t, \mathbf{C}')$, które muszą zależeć od nowych stałych dowolnych $\mathbf{C}'$. Te zaś najprościej zdefiniować jako warunki początkowe, to znaczy

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C}(t_0).$$

Kiedy podstawimy wartości $\mathbf{C}(t)$ na dany moment czasu do równań (1.17), dostaniemy wartości położeń i prędkości na tę epokę $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$.

1.4 Uzmiennianie stałych oscylatora harmonicznego – oscylator Duffinga

Oscylator Duffinga (1.13) jest układem o jednym stopniu swobody, a więc zamiast wektorów $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$ mamy po prostu $\mathbf{r} = \varphi$ i $\mathbf{v} = \dot{\varphi} = \Phi$. Układem definiującym z prawą stroną $F_0 = -\omega_0^2 \varphi$ jest oscylator harmoniczny (1.14), zaś zaburzeniem jest $P = \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3$. Rozwiązanie definiujące ma więc postać (1.15) zależną od dwóch stałych dowolnych

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Oscylator harmoniczny posiada dwie całki ruchu. Pierwsza z nich to niezależna od czasu całka energii

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} (\Phi^2 + \omega_0^2 \varphi^2) = E = \text{const}, \quad (1.24)$$

ze stałą ruchu E . Druga całka ruchu musi zależeć od czasu (jeśli układ o M stopniach swobody ma $2M$ całek ruchu, to co najmniej jedna z nich musi zależeć od czasu); najprościej wziąć wprost z rozwiązania

$$\Psi_2 = \arctan \left[\frac{\omega_0 \varphi}{\Phi} \right] - \omega_0 t = \chi = \text{const}, \quad (1.25)$$

ze stałą ruchu χ , a więc

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} E \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Zacznijmy od równań (1.22) dla uzmiennionych stałych ruchu po wprowadzeniu siły P . W przypadku, który rozpatrujemy ($M = 1$), pochodna wektorowa $D_{\mathbf{v}}$ to zwykła skalarna pochodna D_{Φ} , czyli

$$\dot{E} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Phi} P = \Phi P, \quad (1.26)$$

oraz

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \Phi} P = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 \varphi}{\Phi}\right)^2} \left(-\frac{\omega_0 \varphi}{\Phi^2}\right) P = -\frac{\omega_0 \varphi}{2E} P. \quad (1.27)$$

Potrzebujemy teraz związków między $\mathbf{C}$ i $\mathbf{S}$, żeby otrzymać równania (1.23). Związki te są proste, gdyż $C_2 = S_2 = \chi$, natomiast po wstawieniu (1.15) do całki energii (1.24) widzimy, że

$$E = \frac{\omega_0^2}{2} A^2, \quad (1.28)$$

czyli

$$A \dot{A} = \frac{\dot{E}}{\omega_0^2} = \frac{\Phi P}{\omega_0^2}. \quad (1.29)$$

Ze związku (1.28) możemy skorzystać także w równaniu (1.27) i ostatecznie otrzymujemy równania dla uzmiennionych stałych: najpierw

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\Phi P}{A \omega_0^2}, \\ \dot{\chi} &= -\frac{\varphi P}{A^2 \omega_0}, \end{aligned}$$

a potem, po wprowadzeniu rozwiązania definiującego (1.15),

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{P}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \chi), \\ \dot{\chi} &= -\frac{P}{A \omega_0} \sin(\omega_0 t + \chi). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Równania (1.30) są ważne dla oscylatora z **dowolną** siłą zaburzającą P . W przypadku oscylatora Duffinga podstawimy do nich

$$P = \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3 = \frac{1}{6} A^3 \omega_0^2 \sin^3(\omega_0 t + \chi). \quad (1.31)$$

Wystarczy już tylko podstawić (1.31) do prawych stron (1.30) a następnie przejść od iloczynów i potęg sinusa i cosinusa do postaci wielomianów trygonometrycznych. Wykorzystamy przy tym

$$(\sin y)^4 = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2y + \cos 4y),$$

oraz

$$\cos y (\sin y)^3 = \frac{1}{8} (2 \sin 2y - \sin 4y).$$

W ten sposób otrzymujemy końcową postać równań ruchu dla małych drgań wahadła w zmiennych oskulacyjnych

$$\begin{aligned} \dot{A} &= A^3 \omega_0 \left[\frac{1}{24} \sin 2\psi - \frac{1}{48} \sin 4\psi \right], \\ \dot{\chi} &= A^2 \omega_0 \left[-\frac{1}{16} + \frac{1}{12} \cos 2\psi - \frac{1}{48} \cos 4\psi \right], \end{aligned} \quad (1.32)$$

gdzie symbol ψ oznacza

$$\psi = \omega_0 t + \chi.$$

Na pierwszy rzut oka, równania (1.32) wyglądają o wiele bardziej nieliniowo niż pierwotne (1.13). Można się nawet zastanawiać, czy warto je przekształcać do takiej postaci. Odpowiedź na to pytanie zależy od sposobu w jaki będziemy próbowali je rozwiązać. Dopiero gdy zapoznamy się z podstawami metod analitycznych i numerycznych mechaniki nieba stanie się jasne, którą z postaci równań ruchu wygodniej jest zastosować. Spróbujmy jednak pokazać, jak łatwo można teraz znaleźć przybliżone rozwiązanie równań (1.32).

W pierwszym przybliżeniu podstawiamy do prawych stron wartości stałych zagadnienia definiującego $A_0 = \text{const}$ oraz $\chi_0 = \text{const}$ wyliczone w epoce t_0 ze zmiennych φ i Φ . Mamy wtedy do czynienia z prostymi równaniami

$$\dot{A} \approx f_1(A_0, \chi_0, t), \quad \dot{\chi} \approx f_2(A_0, \chi_0, t),$$

które sprowadzają się do zwykłych całek oznaczonych

$$A \approx A_0 + \int_{t_0}^t f_1 dt, \quad \chi \approx \chi_0 + \int_{t_0}^t f_2 dt.$$

Całkowanie prowadzi do

$$\begin{aligned}
A &\approx A_0 \left(1 - \frac{A_0^2}{48} [\cos 2\psi_0(t) - \cos 2\psi_0(t_0)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_0^2}{192} [\cos 4\psi_0(t) - \cos 4\psi_0(t_0)] \right), \\
\chi &\approx \chi_0 - \frac{A_0^2 \omega_0}{16} (t - t_0) + \frac{A_0^2}{24} [\sin 2\psi_0(t) - \sin 2\psi_0(t_0)] \\
&\quad - \frac{A_0^2}{192} [\sin 4\psi_0(t) - \sin 4\psi_0(t_0)],
\end{aligned}$$

gdzie

$$\psi_0(t) = \omega_0 t + \chi_0.$$

Można sprawdzić, że w epoce oskulacji t_0 mamy faktycznie $\chi \approx \chi_0$ oraz $A \approx A_0$. Jest to tylko pierwsze przybliżenie, ale zawiera cenne informacje: oskulacyjna amplituda drgań oscyluje wokół pewnej średniej wartości, natomiast faza posiada również „wyraz wiekowy” który modyfikuje okres drgań w zależności od amplitudy wychylenia. Uzyskanie podobnych wyników na podstawie oryginalnych równań Duffinga byłoby bardziej złożone.

1.5 Elementy oskulacyjne i równania Gaussa

Tam, gdzie ruch orbitalny masy punktowej opisany przez zagadnienie dwóch ciał przestaje być modelem wystarczająco dokładnym, można wprowadzić jako zmienne oskulacyjne uzmiennione stałe orbity keplerowskiej czyli **elementy oskulacyjne orbity**.

Jak wiemy z „Wstępu do mechaniki nieba”, ruch każdej z mas w zagadnieniu dwóch ciał z siłą

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r},$$

jest opisany jednoznacznie przez 6 stałych dowolnych, które najczęściej występują w postaci elementów keplerowskich $\mathcal{E}$:

$$a, e, I, \omega, \Omega, M_0 = M(t_0).$$

Znamy już wzory definiujące transformację

$$(\mathbf{r}, \mathbf{v})_t \leftrightarrow \mathcal{E}_{t_0},$$

która z jednej strony pozwala wyliczać na dowolny moment czasu t położenie i prędkość ciała, dla którego podaliśmy elementy keplerowskie $\mathcal{E}$ w momencie t_0 , a z drugiej – pozwala wyliczyć z położenia i prędkości w momencie t elementy $\mathcal{E}$ dla epoki odniesienia t_0 . Ponieważ $\mathcal{E}$ są stałymi ruchu, to biorąc $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ w dowolnym momencie t i wyliczając z nich elementy otrzymamy zawsze te same wartości $\mathcal{E}$.

Jeśli pojawi się dodatkowa siła i ruch ciała nie jest już ruchem keplerowskim, to nadal możemy wyliczać elementy keplerowskie według znanych już wzorów, ale teraz w każdej epoce t możemy otrzymać inne wartości elementów $\mathcal{E}_{t_0}$ dla epoki odniesienia t_0 . Zgodnie z zasadą metody uzmienniania stałych zaczynamy traktować elementy orbity jako funkcje czasu i nazywamy je **elementami oskulacyjnymi**.

Należy wyraźnie odróżnić dwa momenty czasu pojawiające się w tym opisie. **Epoka oskulacji** t jest momentem czasu, w którym mamy dane położenie i prędkość służące do wyliczenia elementów $\mathcal{E}$. Jednym z tych elementów jest **anomalía średnia epoki odniesienia** $M_0 = M(t_0)$, którą otrzymujemy „cofając” lub „popychając” wartość anomalii średniej M z epoki t do epoki t_0 . Ponieważ uzmienniliśmy stałe, to M_0 może być zmienną i w ogólności dla różnych epok oskulacji t_1 i t_2 będziemy mieli $M_0(t_1) \neq M_0(t_2)$.

Używamy więc pojęcia $M_0(t)$ – anomalii średniej epoki odniesienia t_0 dla epoki oskulacji t . Czasami można uprościć sobie życie przyjmując, że $t = t_0$. W przypadku pozostałych elementów nie mamy tego problemu i wystarcza używanie pojęcia epoki oskulacji dla $a(t), e(t)$, itd.

Mówiąc najkrócej, elementy oskulacyjne epoki t to wartości elementów keplerowskich wyliczone dla dowolnej trajektorii wzorami pochodzącymi z zagadnienia dwóch ciał. Jeśli w poprzednim rozdziale traktowaliśmy oscylator Duffinga jak oscylator harmoniczny o zmiennych w czasie amplitudzie i fazie, to teraz będziemy traktować dowolną trajektorię jak orbitę keplerowską o zmiennych w czasie elementach.

Inna, bardziej pogładowa definicja brzmi: elementy oskulacyjne epoki t , to elementy orbity, po której poruszałoby się ciało, gdyby w epoce t przestała działać siła zaburzająca.

Przystąpimy teraz do sformułowania równań ewolucji elementów oskulacyjnych dla dowolnej siły $\mathbf{P}$ zaburzającej zagadnienie dwóch ciał

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{P}.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Znaczenie stałej μ zależy od typu zagadnienia – względnego lub barycentrycznego. Wyprowadzenie równań dla $\dot{a}$, $\dot{e}$, itd. przy dowolnej postaci siły $\mathbf{P}$ – zwanych równaniami Gaussa – przeprowadzimy wykorzystując znane całki ruchu zagadnienia dwóch ciał.

1.5.1 Uzmiennione całki ruchu

Przypomnijmy całki ruchu pojawiające się we względnym lub barycentrycznym zagadnieniu dwóch ciał. Bez względu na typ ruchu, mamy 7 całek niezależnych od czasu:

- Całkę siły żywej *vel* energii

$$h = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}}.\tag{1.34}$$

- Całki pól (momentu pędu)

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.\tag{1.35}$$

- Całki Laplace’a

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{G}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.36)$$

które można także przedstawić w postaci

$$\mu \mathbf{e} = \left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}. \quad (1.37)$$

Tylko 5 spośród nich jest wzajemnie niezależnych, gdyż istnieją dwa związki: $\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = 0$, oraz $e^2 = 1 + 2hG^2\mu^{-2}$. Szóstą całką ruchu jest, w zależności od typu orbity, równanie Keplera (eliptyczne lub hiperboliczne) albo równanie Barkera. Ograniczymy nasze rozważania do orbit eliptycznych jako rozwiązania definiującego, więc szóstą całką ruchu będzie

$$M_0 = E - e \sin E - n(t - t_0), \quad (1.38)$$

gdzie ruch średni n (nadal definiowany poprzez III prawo Keplera $n^2 a^3 = \mu$) i anomalia mimośrodowa E są znanymi funkcjami położenia i prędkości.

Zastosujmy teraz do pierwszych siedmiu całek wzór (1.22), a otrzymamy

$$\dot{h} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}, \quad (1.39)$$

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \mu \dot{\mathbf{e}} &= 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{P})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P})\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{P} = \\ &= \mathbf{P} \times \mathbf{G} + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{P}). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ze względu na wyższy poziom komplikacji, równanie Keplera zostawimy sobie „na później”.

1.5.2 Równanie dla pólności wielkiej

Równania (1.39-1.41) opisują zmiany stałych ruchu, które nie są elementami Keplerowskimi. Są przy tym na tyle ogólne, że nawet trochę żal je psuć przejściem do elementów oskulacyjnych. Na przykład równanie dla $\dot{h}$ jest ważne dla wszystkich typów orbit, ale wydobyć z niego równania na zmiany oskulacyjnej pólności wielkiej a ograniczy jego stosowanie do orbit eliptycznych. Mamy bowiem wzór

$$h = -\frac{\mu}{2a}, \quad (1.42)$$

który wiąże stałą siły żywej h z pólnością wielką elipsy, ale dla orbit hiperbolicznych, gdzie mamy połów rzeczywistą a , prawa strona ma inny znak, natomiast dla orbit parabolicznych mamy z definicji $h = 0$ i dopuszczenie zmian h jest samo w sobie problematyczne.

Ograniczmy się zatem do zaburzonego ruchu eliptycznego i wtedy

$$\dot{h} = \frac{\mu}{2a^2} \dot{a}. \quad (1.43)$$

Przyrównując stronami (1.39) oraz (1.43) otrzymujemy pierwsze z równań Gaussa

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}. \quad (1.44)$$

1.5.3 Równanie dla mimośrodów

Mimośród orbity to długość wektora Laplace'a $\mathbf{e}$. A zatem równanie opisujące zmiany oskulacyjnego mimośrodu możemy uzyskać z równania (1.41) dla $\dot{\mathbf{e}}$. Wystarczy w tym celu skorzystać z pożytecznej tożsamości: dla każdego wektora $\mathbf{x}$ obowiązuje

$$\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = x\dot{x}.$$

A jeśli użyjemy wersora $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/||\mathbf{x}|| = \mathbf{x}/x$, o jednostkowej długości, to

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{x}.$$

Pomnóżmy więc obie strony (1.41) skalarnie przez wersor $\hat{\mathbf{e}}$. Po lewej stronie pojawi się $\hat{\mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{e}} = \dot{e}$ i otrzymamy drugie z równań Gaussa

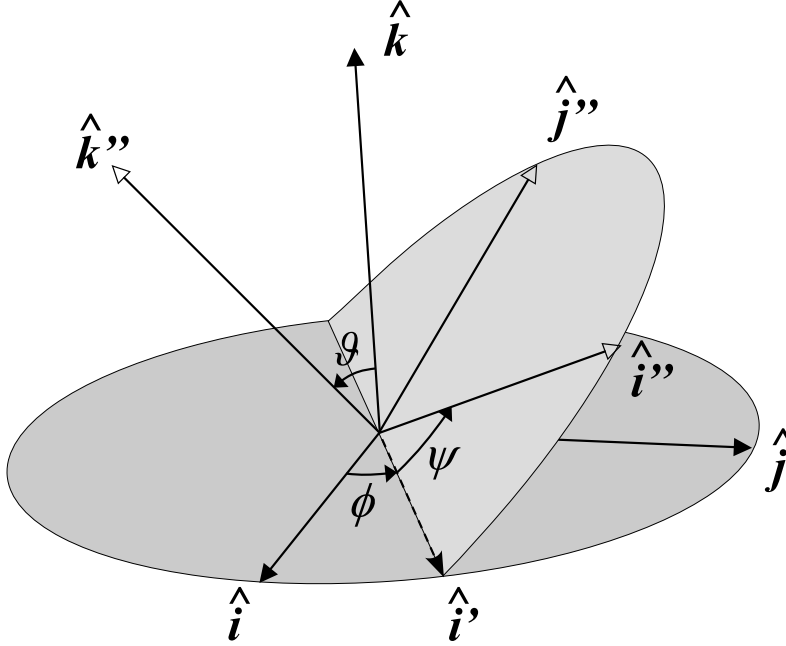
$$\mu \dot{e} = 2(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}) - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{P}). \quad (1.45)$$

Ograniczenie w stosowaniu tego równania pojawiło się w sposób nieco zakamufLOWANY: traci ono sens dla orbit kołowych z $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, gdyż wtedy nie istnieje wersor $\hat{\mathbf{e}}$.

1.5.4 Kąty Eulera a prędkość kątowna

Po znalezieniu wzorów dla $\dot{a}$ i $\dot{e}$ stajemy wobec problemu powiązania zmian wektorów $\mathbf{G}$ i $\mathbf{e}$ ze zmianami kolejnych elementów keplerowskich: Ω , I , ω , które mają charakter kątów Eulera typu 3-1-3 orientujących orbitę w przestrzeni. Wykorzystamy do tego ważne twierdzenie dotyczące związku prędkości kątowej z obrotami o kąty Eulera typu 3-1-3.

Rozpatrzmy dwa prawoskrętne układy współrzędnych: stały, o wersorach osi $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ i obracający się, o wersorach osi $(\hat{\mathbf{i}}'', \hat{\mathbf{j}}'', \hat{\mathbf{k}}'')$. W każdym momencie czasu możemy powiązać te dwa układy przez chwilowe wartości kątów Eulera ϕ, ϑ, ψ , związane z trzema obrotami (rys. 1.2):



Rysunek 1.2: Układy odniesienia i kąty Eulera 3-1-3.

- Wokół osi $\hat{k}$ podstawowego układu współrzędnych $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, o kąt ϕ . Taki obrót przenosi wektor $\hat{i}$ w położenie $\hat{i}'$ wyznaczające linię przecięcia płaszczyzn podstawowych obu układów.
- Obrót wokół chwilowej osi $\hat{i}'$ o kąt ϑ . W wyniku tej operacji wektor $\hat{k}$, który nie uległ zmianie przy pierwszym obrocie, przechodzi w nowy wektor $\hat{k}''$.
- Obrót wokół osi $\hat{k}''$ o kąt ψ , który przenosi wektor $\hat{i}'$ w wektor $\hat{i}''$.

Jeśli kąty Eulera zmieniają się w czasie w sposób ciągły, to punkt wyznaczony przez koniec radialnego wektora $\hat{r}$ sztywno związanego z układem $(\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}'')$ (takiego, którego rzuty $\hat{r} \cdot \hat{i}'', \hat{r} \cdot \hat{j}'', \hat{r} \cdot \hat{k}''$ są stałe – w szczególności jeden z wektorów osi) zyskuje prędkość kątową ω_r i mamy względem osi stałych

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega_r \times \hat{r}. \quad (1.46)$$

TWIERDZENIE 1 Prędkość kątowna obrotu opisanego kątami

Eulera 3-1-3 ϕ, ϑ, ψ wynosi

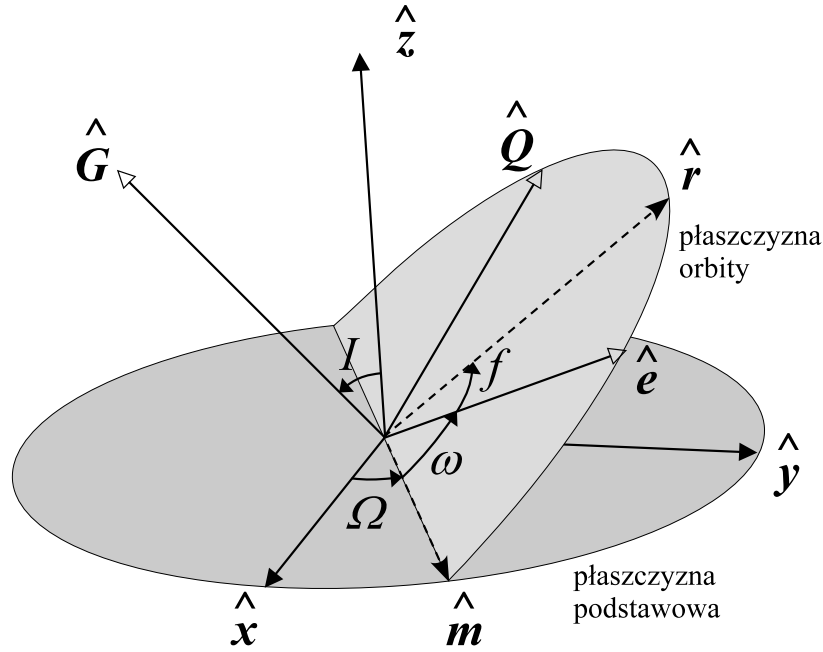
$$\boldsymbol{\omega}_r = \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}} + \dot{\vartheta} \hat{\mathbf{i}}' + \dot{\psi} \hat{\mathbf{k}}''. \quad (1.47)$$

Dowód tego twierdzenia znaleźć można w podręcznikach mechaniki klasycznej, ale – jak zauważył C. Leubner (1981, Am. J. Phys. 49, 323) – „proste” dowody wzoru (1.47), które trafiły do podręczników, są zazwyczaj niepoprawne.

Warto zapamiętać, że podane twierdzenie jest ważne nie tylko w mechanice. W astronomii sferycznej i astrometrii może ono być zastosowane do opisu wpływu małych zmian kątów Eulera na położenie punktu na sferze niebieskiej

$$\Delta \hat{\mathbf{r}} \approx \left(\Delta \phi \hat{\mathbf{k}} + \Delta \vartheta \hat{\mathbf{i}}' + \Delta \psi \hat{\mathbf{k}}'' \right) \times \hat{\mathbf{r}}.$$

WYKŁAD 4



Rysunek 1.3: Układy odniesienia podstawowy i orbitalny: Ω , I , ω jako kąty Eulera 3-1-3.

1.5.5 Równania dla oskulacyjnej długości węzła wstępującego i nachylenia

Przypomnijmy, że wektor momentu pędu $\mathbf{G}$ definiuje orientację płaszczyzny orbity w przestrzeni. Jest on prostopadły do tej płaszczyzny, więc nachylenie I definiujemy poprzez iloczyn skalarny z wersorem osi z układu

$$\hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos I, \quad (1.48)$$

natomiast kierunek do węzła wstępującego dany jest wersorem

$$\hat{\mathbf{m}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{G}}}{\sin I}. \quad (1.49)$$

Ponieważ kąt między wektorem osi x a wektorem $\hat{\mathbf{m}}$ jest równy długości węzła wstępującego Ω , widzimy że równania dla zmian I oraz Ω powinny wynikać z równań (1.40) dla $\hat{\mathbf{G}}$.

Przypomnijmy teraz definicję układu orbitalnego perycentrycznego, którego trzy wersory to: $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{G} \times \hat{\mathbf{e}})$, oraz $\hat{\mathbf{G}}$. Jest on powiązany z układem dowolnym o wersorach $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ obrotami o kąty $\phi = \Omega$, $\vartheta = I$, oraz $\psi = \omega$, a kolejne osie obrotu to $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{i}}' = \hat{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{k}}'' = \hat{\mathbf{G}}$ (rys. 1.3).

Przedstawmy moment pędu $\mathbf{G}$ jako iloczyn długości i wersora $G\hat{\mathbf{G}}$. Równanie (1.40) przybiera wtedy postać

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{d}{dt} (G\hat{\mathbf{G}}) = \dot{G}\hat{\mathbf{G}} + G \frac{d\hat{\mathbf{G}}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}.$$

Skąd biorą się zmiany kierunku $\hat{\mathbf{G}}$? Możemy uznać, że wersor $\mathbf{G}$, jest to wektor $\hat{\mathbf{z}}$ aktywnie obrócony o kąty Eulera $\phi = \Omega$ i $\vartheta = I$ (trzeci kąt $\psi = \omega$ jest nieistotny). Ciągła zmiany kątów Eulera Ω, I wywołują prędkość katową końca $\hat{\mathbf{G}}$ i stosując Twierdzenie 1 uzyskamy wektorową równość

$$\dot{G}\hat{\mathbf{G}} + G \sin I \dot{\Omega} \hat{\mathbf{m}} + G \dot{I} \hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \quad (1.50)$$

która nie posiada wyrazu związanego z $\dot{\omega}$, gdyż $G\dot{\omega}\hat{\mathbf{G}} \times \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$. W wyrazie z $\dot{\Omega}$ wykorzystaliśmy fakt, że $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{G}} = \sin I \hat{\mathbf{m}}$, w myśl równania (1.49).

Jak z układu trzech równań (1.50) otrzymać dwa osobne równania skalarnie dla $\dot{\Omega}$ oraz $\dot{I}$? Najgorsze, co by można wymyślić, to rozpisać wszystkie wektory na składowe w wybranej bazie i rozwiązywać układ trzech równań z niewiadomymi $\dot{G}$, $\dot{\Omega}$, $\dot{I}$. O wiele bardziej wydajne jest jednak podejście wektorowe, polegające na wykonaniu iloczynu skalarnego z umiejętnie dobranym wektorem.

Jeśli interesuje nas $\dot{\Omega}$, to powinniśmy pomnożyć obie strony (1.50) przez wektor który jest prostopadły zarówno do $\hat{\mathbf{G}}$, jak i do $\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}}$. Z tego punktu widzenia, idealnym wyborem jest wersor $\hat{\mathbf{m}}$, który prowadzi do

$$\dot{G} \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{G}} + G \sin I \dot{\Omega} \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{m}} + G \dot{I} \hat{\mathbf{m}} \cdot (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}}) = \hat{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{P}).$$

Ponieważ $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{G}} = 0$, $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{m}} = 1$, oraz w myśl reguły cyklicznego przestawiania czynników w mieszanym iloczynie wektorowym,

$$\hat{\mathbf{m}} \cdot (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}}) = \hat{\mathbf{G}} \cdot (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{m}}) = 0,$$

zostaje nam

$$G \sin I \dot{\Omega} = \mathbf{P} \cdot (\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{r}),$$

gdzie prawa strona powstała przez cykliczne przestawienie czynników. Ponieważ $\hat{\mathbf{m}}$ i $\mathbf{r}$ leżą w płaszczyźnie orbity i ich iloczyn wektorowy ma kierunek $\hat{\mathbf{G}}$, a kąt jaki tworzą to tzw. argument szerokości $f + \omega$ (suma anomalii prawdziwej f i argumentu perycentrum), dochodzimy do kolejnego z równań Gaussa

$$G \sin I \dot{\Omega} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{G}} r \sin(f + \omega). \quad (1.51)$$

W podobny sposób otrzymamy równanie dla zmian nachylenia. Tym razem optymalny wybór wektora do iloczynu skalarnego to wersor $(\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}})$, prostopadły zarówno do linii węzłów, jak i do momentu pędu. Mnożąc (1.50) skalarnie przez ten wektor, otrzymujemy

$$G \dot{I} = (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot ((\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}}) \times \mathbf{r}).$$

Zależnie od stopnia posiadanej wyobraźni przestrzennej, albo stosujemy tożsamość „bac-cab”

$$(\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{G}}) \times \mathbf{r} = (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{G}} - (\hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{m}} = r \cos(f + \omega) \hat{\mathbf{G}},$$

albo analizujemy kierunki i kąty między poszczególnymi wektorami, otrzymując ten sam wynik

$$G \dot{I} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{G}} r \cos(f + \omega). \quad (1.52)$$

Obydwa równania (1.51) oraz (1.52) nie mają sensu dla $I = 0$ lub $I = \pi$, gdyż korzystaliśmy w wyprowadzeniu z wersora $\hat{\mathbf{m}}$, który nie istnieje w tych przypadkach. Również dla orbit prostoliniowych, gdy $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, równania te tracą sens, gdyż nie istniałby wersor $\hat{\mathbf{G}}$.

1.5.6 Równanie dla oskulacyjnego argumentu perycentrum

Zmiany argumentu perycentrum, czyli kąta między $\hat{\mathbf{m}}$ a $\hat{\mathbf{e}}$, otrzymamy z uzmiennionych całek Laplace’a (1.41). Podobnie jak dla momentu pędu, przedstawimy wektor Laplace’a jako iloczyn $\mathbf{e} = e \hat{\mathbf{e}}$ i uznamy $\hat{\mathbf{e}}$ za wersor $\hat{\mathbf{x}}$ obrócony o kąty Ω, I, ω po czym skorzystamy z Twierdzenia 1

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{e} \hat{\mathbf{e}} + e \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} = \dot{e} \hat{\mathbf{e}} + e \left(\dot{\Omega} \hat{\mathbf{z}} + \dot{I} \hat{\mathbf{m}} + \dot{\omega} \hat{\mathbf{G}} \right) \times \hat{\mathbf{e}}. \quad (1.53)$$

Niestety, nie możemy liczyć na usunięcie wszystkich pochodnych oprócz $\dot{\omega}$, więc stosujemy wariant skromniejszy: iloczyn skalarny z wersorem

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{G}} \times \hat{\mathbf{e}},$$

który leży w płaszczyźnie orbity i jest odległy od perycentrum o 90° w kierunku ruchu orbitalnego. Z definicji, $\hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$, więc podstawiając (1.53) do (1.41) i mnożąc obie strony przez $\hat{\mathbf{Q}}$ mamy

$$\mu e \left(\dot{\Omega} \hat{\mathbf{Q}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}) + \dot{I} \hat{\mathbf{Q}} \cdot (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{e}}) + \dot{\omega} \right) = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{R},$$

gdzie przez $\mathbf{R}$ oznaczyliśmy jedną z dwóch postaci prawych stron równania wektorowego (1.41). Łatwo sprawdzić, że

$$\hat{\mathbf{Q}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}) = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{Q}}) = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{G}} = \cos I,$$

oraz

$$\hat{\mathbf{Q}} \cdot (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{e}}) = \hat{\mathbf{m}} \cdot (\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{Q}}) = \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{G}} = 0,$$

więc, wybierając pierwszą postać prawych stron,

$$\mu e \left(\dot{\omega} + \cos I \dot{\Omega} \right) = 2(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{Q}})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}) - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{Q}})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{P}). \quad (1.54)$$

Wyraz zawierający $\dot{\Omega}$ zostawiliśmy chwilowo po lewej stronie dla podkreślenia, że przy $I = 0$ (gdy $\cos I = 1$) prowadzi on do dobrze określonego równania dla długości perycentrum $\varpi = \dot{\omega} + \dot{\Omega}$. Natomiast w przypadku $I = \pi$, $e = 0$ lub orbit prostoliniowych, równanie Gaussa (1.54) traci sens.

WYKŁAD 5

1.5.7 Równania dla zmian anomalii

Pozostało nam już tylko równanie dla zmian oskulacyjnej anomalii średniej epoki odniesienia t_0 , czyli $\dot{M}_0$ w zagadnieniu zaburzonym. Trafiamy tutaj na dość nieprzyjemny problem. W pierwotnej postaci, równanie Keplera (1.38) miało postać

$$M = E - e \sin E.$$

Anomalia średnia jest w ruchu keplerowskim dana poprzez

$$M(t) = n [t - t_0] + M_0.$$

Tylko że w zagadnieniu dwóch ciał ruch średni $n = \sqrt{\mu a^{-3}}$ jest stały, podczas gdy w ruchu zaburzonym zmienność pólasi wielkiej uzmiennia n . Jak więc traktować M ? Czy przyjąć

$$M(t) = n(t) [t - t_0] + M_0, \quad (1.55)$$

czy może

$$M(t) = \int_{t_0}^t n(t) dt + M_0, \quad (1.56)$$

jako definicję podstawową ? Każde z tych podejść prowadzi do innej definicji M_0 w przypadku zaburzonym. Wariant (1.56) przyjmowany jest najczęściej, gdyż prowadzi do względnie prostego

$$\dot{M} = n(t) + \dot{M}_0, \quad (1.57)$$

podczas gdy (1.55) oznacza

$$\dot{M} = n + \dot{n} [t - t_0] + \dot{M}_0, \quad (1.58)$$

co prowadzi do nieprzyjemnej sytuacji: jeśli $\dot{n}$ ma charakter ograniczonych oscylacji o częstotliwości α , to pojawiają się bardzo niepożądane wyrazy typu $t \cos \alpha t$, zwane mieszanymi wyrazami wiekowymi.

Żeby uniknąć dylematów związanych z definicją M_0 , obejdźmy problem w ten sposób, że wyprowadzimy równanie dla $\dot{M}$, a wybór definicji M_0 pozostawimy otwarty. Co więcej, w wielu sytuacjach można się bez niego obejść i przestać na $M(t)$.

Różniczkując równanie Keplera w przypadku zaburzonym

$$\dot{M} = \dot{E}(1 - e \cos E) - \dot{e} \sin E, \quad (1.59)$$

widzimy, że potrzebna będzie pochodna anomalii mimośrodowej, gdyż wzór na $\dot{e}$ został wyprowadzony wcześniej. Informację o $\dot{E}$ najlepiej otrzymać na podstawie prędkości kątowej anomalii prawdziwej $\dot{f}$, gdyż ta druga ma prostą definicję geometryczną jako kąt między $\hat{e}$ i $\hat{r}$.

Wyjdźmy od oczywistego wzoru na prędkość

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}.$$

Zuważmy teraz, że wersor położenia $\hat{r}$ możemy otrzymać z wersora $\hat{x}$ poprzez obrót o kąty Eulera Ω , I , $\omega + f$ ze znajomymi wersorami obrotu $\hat{z}$, $\hat{m}$, $\hat{G}$. A więc można zastosować Twierdzenie 1 i napisać

$$\dot{r}\hat{r} + r\left(\dot{\Omega}\hat{z} + \dot{I}\hat{m} + (\dot{\omega} + \dot{f})\hat{G}\right) \times \hat{r} = \mathbf{v}.$$

Pomnóżmy skalarnie obie strony przez wersor

$$\hat{t} = (\hat{G} \times \hat{r}),$$

prostopadły do wektora położenia, leżący w płaszczyźnie orbity i skierowany zgodnie z ruchem ciała. Po uwzględnieniu $\hat{r} \cdot \hat{t} = 0$, oraz

$$\hat{t} \cdot (\hat{m} \times \hat{r}) = \hat{m} \cdot (\hat{r} \times \hat{t}) = \hat{m} \cdot \hat{G} = 0,$$

$$\hat{t} \cdot (\hat{z} \times \hat{r}) = \hat{z} \cdot (\hat{r} \times \hat{t}) = \hat{z} \cdot \hat{G} = \cos I,$$

otrzymujemy

$$r\left(\dot{\Omega}\cos I + \dot{\omega} + \dot{f}\right) = \mathbf{v} \cdot \hat{t}.$$

Ale to, co widzimy po prawej stronie, to nic innego jak prędkość transwersalna, która z defincji ma postać

$$v_t = \mathbf{v} \cdot \hat{t} = \frac{G}{r}.$$

Wzór dla prędkości kątowej anomalii prawdziwej w ruchu zaburzonym ma zatem postać

$$\dot{f} = \frac{G}{r^2} - \dot{\omega} - \cos I \dot{\Omega}, \quad (1.60)$$

taką jak w ruchu keplerowskim, tylko z poprawką na ruch linii apsyd od której mierzymy f .

Aby znaleźć związek między $\dot{E}$ a $\dot{f}$ w przypadku zaburzonym, zróżniczkujemy funkcję

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f},$$

która może służyć jako związek między f i E . Uwzględniając możliwość zmian mimośrodów, dostaniemy

$$-\cos E \dot{e} + e \sin E \dot{E} = -\frac{r}{p} \left[2e + \frac{r}{a} \cos f \right] \dot{e} + \frac{e r^2 \sin f}{a p} \dot{f}, \quad (1.61)$$

gdzie $p = a(1 - e^2)$, dla orbit eliptycznych. Po niezbyt wyrafinowanych przekształceniach, uwzględniających

$$r = a(1 - e \cos E), \quad r \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r \cos f = a(\cos E - e),$$

równanie (1.61) przyjmuje postać

$$\dot{E} = \frac{r}{a \sqrt{1 - e^2}} \dot{f} - \frac{\sin E}{1 - e^2} \dot{e}. \quad (1.62)$$

Podstawiając (1.62) i (1.60) do (1.59) dostajemy

$$\dot{M} = n - \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (\dot{\omega} + \cos I \dot{\Omega}) - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin E \dot{e}. \quad (1.63)$$

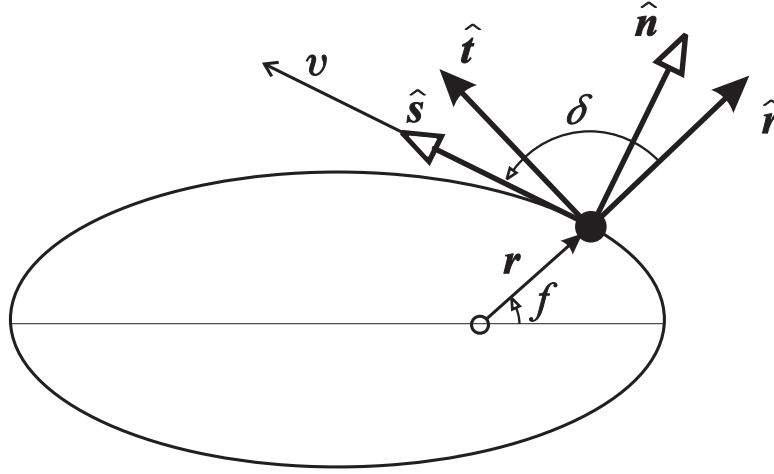
Uznamy to równanie za szóste z równań Gaussa, gdyż stosownie do wyboru definicji M_0 prowadzi ono bezpośrednio do $\dot{M}_0$ w połączeniu z równaniem (1.58) lub (1.57).

1.5.8 Składowe siły zaburzające

Przyglądając się równaniom (1.44, 1.45, 1.51, 1.52, 1.54) stwierdzamy, że zawierają one iloczyny skalarne siły zaburzającej $\mathbf{P}$ z rozmaitymi wektorami: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\hat{\mathbf{e}}$, $\mathbf{Q}$ i $\hat{\mathbf{G}}$. Pierwsze cztery z nich leżą w płaszczyźnie oskulacyjnej orbity, prostopadłej do chwilowego momentu pędu $\mathbf{G}$. Staramy się ograniczyć liczbę tych iloczynów rozkładając $\mathbf{P}$ na składowe w jednej z trzech podstawowych baz: radialnej, stycznej lub perycentrycznej. Wszystkie trzy bazy mają wspólny wersor $\hat{\mathbf{G}}$, który dalej oznaczać będziemy przez $\hat{\mathbf{b}}$ i nazywać, zgodnie z terminologią geometrii różniczkowej, wersorem binormalnym.

Baza radialna zdefiniowana jest przez wersory

- radialny $\hat{\mathbf{r}}$ – wzdłuż promienia wodzącego,
- transwersalny $\hat{\mathbf{t}}$ – prostopadły do radialnego, leżący w płaszczyźnie orbity i skierowany zgodnie z ruchem ciała,
- binormalny (normalny do płaszczyzny orbity) $\hat{\mathbf{b}}$ – wzdłuż wektora momentu pędu.



Rysunek 1.4: Bazy radialna i styczna. Wersor binormalny skierowany jest „do góry” – prostopadle do płaszczyzny rysunku.

Składowe siły $\mathbf{P}$ w tej bazie oznaczymy odpowiednio przez R , T i B :

$$\mathbf{P} = R\hat{\mathbf{r}} + T\hat{\mathbf{t}} + B\hat{\mathbf{b}}.$$

Ich wartości można zdefiniować przy pomocy iloczynów $\mathbf{P}$ z wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$

$$\begin{aligned} R &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ T &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \cdot \left(\frac{\mathbf{G}}{G} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \\ B &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{G}}{G}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Baza styczna składa się z następujących wersorów:

- normalnego $\hat{\mathbf{n}}$, który określa kierunek normalnej zewnętrznej do krzywej jaką jest orbita,
- stycznego $\hat{\mathbf{s}}$, który pokrywa się z kierunkiem wektora prędkości,
- binormalnego $\hat{\mathbf{b}}$, wspólnego dla obu baz.

Siła $\mathbf{P}$ ma w tej bazie składowe N , S i B :

$$\mathbf{P} = N\hat{\mathbf{n}} + S\hat{\mathbf{s}} + B\hat{\mathbf{b}}.$$

Wartości tych składowych można wyliczyć z definicji

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \times \frac{\mathbf{G}}{G} \right), \\ S &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}, \\ B &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{G}}{G}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Ponieważ składowa B jest jednakowa w obu bazach, pozostaje nam jedynie problem związku między składowymi R , T i N , S .

Transformacja z r-t-b do n-s-b jest elementarna, gdyż wymaga jedynie obrotu o kąt $\frac{\pi}{2} - \delta$, gdzie δ jest kątem między wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$ (por. Rys. 1.4). A zatem

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \delta) & \sin(\frac{\pi}{2} - \delta) \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - \delta) & \cos(\frac{\pi}{2} - \delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ S \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

czyli

$$\begin{aligned} R &= N \sin \delta + S \cos \delta, \\ T &= -N \cos \delta + S \sin \delta, \end{aligned} \quad (1.67)$$

oraz

$$\begin{aligned} N &= R \sin \delta - T \cos \delta, \\ S &= R \cos \delta + T \sin \delta. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Funkcje trygonometryczne kąta δ są określone poprzez iloczyny wektorów $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r v} = \frac{r \dot{r}}{r v} = \frac{\dot{r}}{v}, \\ \sin \delta &= \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}{r v} = \frac{G}{r v} = \frac{r \dot{f}}{v}. \end{aligned}$$

Jeśli sięgniemy do wzorów opisujących prędkość radialną $\dot{r}$ i transwersalną $r \dot{f}$ oraz przyjmiemy skrótowe oznaczenie

$$\gamma = \sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}$$

tak, aby $v = \gamma \sqrt{\mu/p}$, to otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{e \sin f}{\gamma}, \\ \sin \delta &= \frac{1 + e \cos f}{\gamma} = \frac{p}{r \gamma}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Baza perycentryczna spotykana jest rzadziej. Tworzą ją wersory:

- perycentryczny $\hat{\mathbf{e}}$, czyli wersor wektora Laplace’a, skierowany do perycentrum,
- prostopadły do perycentrum $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{e}}$, leżący w płaszczyźnie orbity (zwany też wersorem Hamiltona),
- binormalny $\hat{\mathbf{b}}$.

W odróżnieniu od radialnej i stycznej, baza ta jest nieokreślona w przypadku orbit kołowych.

1.5.9 Ostateczna postać wzorów Gaussa

Po zdefiniowaniu baz, możemy przejść do ostatecznego uporządkowania równań Gaussa dla elementów oskulacyjnych wypisując każde z nich w trzech postaciach: najpierw w postaci wektorowej a następnie jako funkcje składowych R, T, B oraz N, S, B . Wyprowadzenie tych wzorów na podstawie równań (1.44, 1.45, 1.51, 1.52, 1.54, 1.63) jest elementarne i pozostawimy je jako samodzielne ćwiczenie. Podamy tylko wersję dla zaburzonych orbit eliptycznych.

Użyjemy oznaczeń $s = \sin I$, $c = \cos I$, $p = a(1 - e^2)$, oraz $n = \sqrt{\mu a^{-3}}$.
Równania dla pięciu elementów oskulacyjnych to:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[R e \sin f + T \frac{p}{r} \right] = \frac{2v}{n^2 a} S, \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{1}{\mu a e} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r} + (a p - r^2) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{P} \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a} [R \sin f + T (\cos f + \cos E)] \\ &= \frac{1}{v} \left[S \frac{2p}{r} \cos E + N \sqrt{1-e^2} \sin E \right], \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\dot{I} = \frac{r \cos(f + \omega)}{\mu p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P} = \frac{r \cos(f + \omega)}{\sqrt{\mu p}} B, \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{r}{\mu p e} \left[\frac{\sqrt{\mu p}}{r} (\cos E + e) \mathbf{r} - (p + r) \sin f \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{P} - c \dot{\Omega} \\ &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-R \cos f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] - c \dot{\Omega} \\ &= \frac{1}{e v} [2 S \sin f - N (e + \cos E)] - c \dot{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(f + \omega)}{s \mu p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P} = \frac{r \sin(f + \omega)}{s \sqrt{\mu p}} B. \quad (1.74)$$

Do tego dochodzi szóste równanie dla anomalii średniej

$$\begin{aligned} \dot{M} &= n - \frac{1}{n a^2} \left[2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} + \sqrt{\mu p} (\dot{\omega} + c \dot{\Omega}) \right] \\ &= n - \frac{1}{n a^2 e} [R (2 r e - p \cos f) + T (r + p) \sin f] \\ &= n - \frac{\sqrt{1-e^2}}{v e} \left[N (\cos f - e) - S \left(1 + \frac{2 r e^2}{p} \right) \sin f \right], \end{aligned} \quad (1.75)$$

lub – jeszcze prostsze – dla anomalii prawdziwej

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\omega} - c \dot{\Omega}. \quad (1.76)$$

WYKŁAD 6

1.5.10 Elementy nieosobliwe

Przyglądając się równaniom Gaussa zauważymy, że jeśli $e = 0$, to nie wolno używać wzorów dla $\dot{e}$, $\dot{M}$ i $\dot{\omega}$, gdyż albo wystąpi dzielenie przez zero, albo odwołamy się do nieokreślonych kątów f i E . Natomiast jeśli $I = 0$ lub $I = \pi$, to nie wolno używać równań dla $\dot{I}$ lub $\dot{\Omega}$, gdyż albo wystąpi dzielenie przez zero, albo pojawi się nieokreślony kąt $f + \omega$. Oczywiście, nie oznacza to, że nie potrafimy się obchodzić z takimi orbitami. Wystarczy wtedy stosować tzw. elementy nieosobliwe, będące funkcjami elementów keplerowskich. Są to np.

$$\begin{cases} q &= \sin \frac{I}{2} \cos \Omega, \\ p &= \sin \frac{I}{2} \sin \Omega, \\ \varpi &= \omega + \Omega, \end{cases} \quad (1.77)$$

dla małych nachyleń lub

$$\begin{cases} k &= e \cos \varpi, \\ h &= e \sin \varpi, \\ \lambda &= M + \varpi, \end{cases} \quad (1.78)$$

dla małych mimośrodków. Niestety, te tradycyjne symbole kolidują z równie tradycyjnym p – parametr orbity, q – odległość perycentrum, h – stała siły żywej i k – stała Gaussa. Kąt ϖ nosi nazwę długości perycentrum, zaś λ to długość średnia.

Odpowiednia modyfikacja równań Gaussa prowadzi do równań pozbawionych osobliwości. Na przykład, dla małych mimośrodków używamy

$$\dot{\lambda} = \dot{M} + \dot{\varpi},$$

oraz

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \dot{e} \cos \varpi - e \dot{\varpi} \sin \varpi = \frac{\dot{e} k}{\sqrt{h^2 + k^2}} - h \dot{\varpi}, \\ \dot{h} &= \dot{e} \sin \varpi + e \dot{\varpi} \cos \varpi = \frac{\dot{e} h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + k \dot{\varpi}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zmienne h, k są poprawnie określone nie tylko dla orbit kołowych, lecz i dla orbit z zerowym nachyleniem. To, że kąt ϖ jako formalna suma $\omega + \Omega$ nie traci sensu geometrycznego przy zerowym nachyleniu, jest oczywiste: przechodzi on gładko w kąt płaski między wersorami $\hat{x}$ i $\hat{e}$.

Pokażmy jednak, że równanie Gaussa dla $\dot{\varpi}$ nie zawiera osobliwości, jeśli wykonamy w nim stosowne przekształcenie. Przypomnijmy wzór (1.54), który przepisujemy w postaci

$$\dot{\omega} = \frac{F}{\mu e} - \cos I \dot{\Omega},$$

gdzie

$$F = 2(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{Q}})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}) - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{Q}})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{P}).$$

Mamy więc dla długości perycentrum

$$\dot{\varpi} = \dot{\omega} + \dot{\Omega} = \frac{F}{\mu e} + (1 - \cos I) \dot{\Omega}.$$

W sytuacji zerowego nachylenia wyraz $F/(\mu e)$ nie sprawia żadnych kłopotów (o ile $e > 0$) natomiast w $\dot{\Omega}$, które dane jest równaniem (1.74), pojawia się zarówno dzielenie przez $\sin I = 0$, jak i nieokreślony kąt $f + \omega$:

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(f + \omega)}{\sin I G} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{b}}.$$

Po wstawieniu (1.74), równanie dla $\dot{\varpi}$ przybiera postać

$$\dot{\varpi} = \frac{F}{\mu e} + \left[\frac{1 - \cos I}{\sin I} \right] \frac{r \sin(f + \omega)}{G} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{b}}.$$

Ale wyrażenie w nawiasie kwadratowym to nic innego jak tangens połowy nachylenia, więc mamy

$$\dot{\varpi} = \frac{F}{\mu e} + \operatorname{tg} \frac{I}{2} \frac{r \sin(f + \omega)}{G} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{b}}.$$

Przy nachyleniu $I = 0$, cały drugi składnik znika i problem nieokreślonego argumentu $f + \omega$ przestaje być istotny. Oczywiście, bardziej eleganckim rozwiązaniem jest wyrugowanie kąta ω , co łatwo zrealizować przy pomocy zmiennych p, q :

$$\begin{aligned} \sin(f + \omega) &= \sin(f + \varpi - \Omega) = \sin(f + \varpi) \cos \Omega - \cos(f + \varpi) \sin \Omega = \\ &= \frac{q \sin(f + \varpi) - p \cos(f + \varpi)}{\sin \frac{I}{2}}, \end{aligned}$$

i tak otrzymujemy jawnie nieosobliwe

$$\dot{\varpi} = \frac{F}{\mu e} + \frac{r(q \sin(f + \varpi) - p \cos(f + \varpi))}{G \sqrt{1 - p^2 - q^2}} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{b}}, \quad (1.79)$$

gdzie podstawiliśmy $\cos I/2 = \sqrt{1 - \sin^2 I/2} = \sqrt{1 - (p^2 + q^2)}$.

Przekształcanie do postaci nieosobliwej ze względu na mimośród przebiega podobnie. Odpowiednikiem wykorzystania tangensa połowy nachylenia jest wtedy przekształcenie

$$\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

1.6 Przykładowe zastosowania równań Gaussa

Spróbujemy teraz zilustrować zastosowania równań Gaussa zanim jeszcze zajmiemy się ogólnymi metodami rozwiązywania równań ruchu. Istnieją dwa przypadki, w których zastosowanie równań Gaussa staje się uzasadnione: po pierwsze – gdy mamy do czynienia z siłą dyssypatywną jak na przykład opór ośrodka, po drugie – gdy stosujemy tzw. *przybliżenie impulsowe*, w którym siła zmienia się skokowo (fizycznie odpowiada to takim efektom jak odpalenie silnika statku kosmicznego, zaburzenie ruchu przez pojedyncze i krótkotrwałe zbliżenie z trzecim ciałem itp.). W pierwszym przypadku nie można wprowadzić potencjału, co uniemożliwia zastosowanie formalizmu bardziej szczegółowego niż newtonowski. W drugim – trzeba obchodzić problemy związane z nieciągłością siły jako pochodnej z potencjału. Przedstawmy przykłady obu zastosowań.

1.6.1 Wpływ oporu ośrodka na elementy oskulacyjne.

Rozpatrzmy względne zagadnienie dwóch ciał, w którym na badaną masę działa hamująca siła $\mathbf{P}$ wywołana oporem nieruchomego ośrodka. Siła tego rodzaju skierowana jest stycznie do chwilowej orbity, w kierunku przeciwnym do wektora prędkości. Możemy więc zauważyć, że jej składowe w bazie stycznej mają wartości

$$S = S(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 0, \quad N = B = 0,$$

gdzie bez względu na postać zależności tarcia od położenia ciała $\mathbf{r}$ i jego prędkości $\mathbf{v}$, poprzestajemy jedynie na stwierdzeniu, że $S < 0$ a więc opór nie zanika ani (tym bardziej) nie zmienia znaku. Przyjrzyjmy się równaniom Gaussa (1.70–1.74), w których jedyną niezerową składową będzie S

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2v}{n^2 a} S < 0, \\ \dot{e} &= \frac{2pS}{r v} \cos E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{\Omega} = 0, \\ \dot{\omega} &= \frac{2S}{ev} \sin f. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Pomijając równanie dla anomalii średniej (1.75) jako mniej istotne, zobaczmy jak wiele ważnych wniosków o ewolucji orbity można wysnuć z samych tylko równań Gaussa (bez ich rozwiązywania):

1. Półosć wielka orbity systematycznie maleje, gdyż $\dot{a} < 0$. W konsekwencji może nastąpić kolizja obu mas, ale pod warunkiem, że spadek półosi do zera wymaga skończonego czasu.
2. Działająca stycznie siła tarcia nie powoduje zmian w orientacji płaszczyzny orbity, gdyż nachylenie I oraz długość linii węzłów Ω pozostają stałe. A zatem trajektoria w tym zagadnieniu jest krzywą płaską o kształcie spiralnym (malejące a).
3. Zmiany oskulacyjnego mimośrod e zależą w sposób istotny od położenia badanej masy na orbicie: w pobliżu perycentrum ($\cos E > 0$) opór ośrodka zmniejsza mimośród ($\dot{e} < 0$) natomiast w pobliżu apocentrum ($\cos E < 0$) mimośród rośnie ($\dot{e} > 0$).

Powstaje w tym momencie interesujące pytanie: czy zmiany mimośrodu mają charakter czysto okresowy? Innymi słowy, czy podczas każdego obiegu przyrost mimośrodu w pobliżu apocentrum jest w pełni kompensowany przez jego spadek w pobliżu perycentrum? Taka pełna symetria efektu zapobiegłaby systematycznym zmianom mimośrodu. Dokładna odpowiedź na to pytanie wymaga nie tylko znajomości dokładnej postaci siły $\mathbf{P}$ lecz również zastosowania odpowiedniej metody rozwiązywania równań ruchu. Można jednak pokusić się o pewne oszacowania gdy siła oporu ośrodka jest słaba.

Jeśli w skali jednego okresu biegu elementy oskulacyjne zmieniają się nieznacznie, to czynnik

$$\alpha = \frac{2p}{rv},$$

jest prawie identyczny w perycentrum i apocentrum, gdyż tam v jest prędkością transwersalną i rv jest równe momentowi pędu G . Uwzględniając fizykę zagadnienia można przyjąć, że $S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ jest proporcjonalna do dodatniej potęgi v (najczęściej jest to v^1 , $v^{\frac{3}{2}}$ lub v^2) oraz do niedodatniej potęgi odległości $r^{-\beta}$, gdzie $\beta \geq 0$ (tzn. gęstość ośrodka jest albo stała albo maleje w miarę oddalania się od masy centralnej).

Porównując wartości w perycentrum

$$\dot{e}_P = \alpha S(q, v_P) < 0,$$

a w apocentrum

$$\dot{e}_A = -\alpha S(Q, v_A) > 0.$$

Zauważmy teraz, że $|S(q, v_P)| > |S(Q, v_A)|$, co sugerują zarówno prędkości $v_P > v_A$ jak i odległości $q < Q$. Jak widać, **opór ośrodka może powodować systematyczny spadek mimośrodów orbity**, gdyż $\dot{e}_P + \dot{e}_A < 0$.

Przedstawione tu rozumowanie wymaga dwóch istotnych zastrzeżeń: po pierwsze, oparte jest na porównaniu dwóch punktów orbity i używa dość grubych przybliżeń; po drugie – nie można twierdzić, jakoby mimośród asymptotycznie dążył do zera, gdyż równania Gaussa dla $\dot{e}$ nie wolno stosować w przypadku małych mimośródów. Malejący systematycznie mimośród jest typową cechą orbit eliptycznych poddanych oporowi ośrodka, ale wnioski o charakterze asymptotycznym, typu $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$, nie zawsze są poprawne (na przykład gdy siła jest odchyłona od wektora prędkości i $N \neq 0$).

1.6.2 Manewry orbitalne (zmiana nachylenia)

Jednym z prostszych zastosowań równań Gaussa jest opis manewru orbitalnego w przybliżeniu impulsowym. Manewr orbitalny to zmiana elementów orbity dokonywana przy pomocy silników korekcyjnych sztucznego satelity lub sondy kosmicznej. Przybliżenie impulsowe natomiast zakłada, że silniki działają stałą siłą $\mathbf{P}$ (zwaną **ciągiem**) przez krótki czas Δt i zmiana w dowolnym elemencie orbity (na przykład w pólosci wielkiej a) może być przedstawiona jako

$$\Delta a \approx \dot{a} \Delta t. \quad (1.81)$$

W każdym manewrze orbitalnym dąży się do uzyskania zamierzonej orbity przy minimalnym wydatku paliwa, co oznacza, że staramy się użyć jak najmniejszego **impulsu** (zwanego również popędem). W naszych rozważaniach będziemy zajmować się impulsem podzielonym przez masę, czyli

$$W = |\mathbf{P}| \Delta t, \quad (1.82)$$

gdyż $\mathbf{P}$ jest przyspieszeniem, a nie siłą.

Dla zilustrowania problemu zajmiemy się manewrem polegającym na zmianie nachylenia orbity.

W świetle równania Gaussa (1.72) jedynie składowa normalna do płaszczyzny orbity powoduje zmianę nachylenia I , a zatem siła powodująca manewr powinna być skierowana prostopadle do płaszczyzny orbity i odpowiada

jej impuls

$$W = B \Delta t.$$

Uzyskany przyrost nachylenia dany będzie wzorem

$$\Delta I = \frac{r \cos(f + \omega)}{\sqrt{\mu p}} W. \quad (1.83)$$

Zastanówmy się teraz, w którym punkcie orbity należy uruchomić silniki aby uzyskać największy przyrost ΔI przy zadanym W . Jedyną wielkością we wzorze (1.83) co do której mamy jakiś wybór jest anomalia prawdziwa f a więc musimy znaleźć maksimum funkcji $r \cos(f + \omega)$ z warunku

$$\frac{d(r \cos(f + \omega))}{df} = 0.$$

Uwzględniając zależność $r(f)$ otrzymamy

$$-p \frac{\sin(f + \omega)(1 + e \cos f) - e \sin f \cos(f + \omega)}{(1 + e \cos f)^2} = 0,$$

a po odrzuceniu niezerowego czynnika $p/(1 + e \cos f)^2$ i skorzystaniu z wzoru dla sinusa różnicy kątów dochodzimy ostatecznie do warunku

$$\sin(f + \omega) + e \sin \omega = 0. \quad (1.84)$$

Dla małych wartości mimośrodów orbity e równanie (1.84) prowadzi do wniosku, że manewr zmiany nachylenia należy przeprowadzić w okolicach jednego z węzłów orbity, gdy $(f + \omega) \approx 0$ lub π . Analizując pozostałe równania Gaussa dochodzimy do wniosku, że manewr impulsem normalnym do płaszczyzny orbity przeprowadzony dokładnie w węźle spowoduje **jedynie** zmianę nachylenia nie wpływając na pozostałe elementy orbity.

Zauważmy również, że przyrost I jest wprost proporcjonalny do odległości r („ramię siły”), a zatem szczególnie uprzywilejowana będzie sytuacja, w której linia apsyd i linia węzłów pokrywają się, aby manewr można przeprowadzić zarazem w węźle i w apocentrum.

Rozdział 2

Formalizm kanoniczny

WYKŁAD 7

Formalizm kanoniczny nazywany jest również formalizmem symplektycznym i stanowi on szczególny przypadek formalizmu Hamiltona. Podstawowe pojęcia tego formalizmu to położenia i pędy uogólnione oraz funkcja Hamiltona. Ruch układu mechanicznego zadany jest poprzez równania kanoniczne Hamiltona. W odróżnieniu od formalizmu newtonowskiego, zakres stosowalności formalizmu kanonicznego jest ograniczony, co bierze się z faktu, że cała dynamika układu jest „zaszyfrowana” w jednej skalarnej funkcji stanu (funkcji Hamiltona), która generuje prawe strony równań ruchu poprzez swój gradient. Musimy więc ograniczyć się do zagadnień z siłami potencjalnymi. Za tę cenę nabywamy jednak możliwość względnie prostego formułowania twierdzeń opisujących całe klasy ruchów.

2.1 Macierze i formy symplektyczne

2.1.1 Standardowa macierz symplektyczna i forma symplektyczna

Oznaczmy przez **J** **standardową macierz symplektyczną**. Jest to antysymetryczna macierz kwadratowa stopnia parzystego $2M \times 2M$, którą można zapisać w postaci blokowej jako

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_M & \mathbf{I}_M \\ -\mathbf{I}_M & \mathbf{0}_M \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Ponieważ $\mathbf{I}_M$ oznacza macierz jednostkową $M \times M$, to – na przykład – dla dwóch stopni swobody mamy

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Często można się spotkać z definicją standardowej macierzy symplektycznej która ma w porównaniu z (2.1) przestawione znaki, ale nie ma to wpływu na większość z dalszych wzorów.

Standardowa macierz symplektyczna jest obiektem posiadającym szereg interesujących właściwości:

$$\mathbf{J}^2 \equiv \mathbf{J} \mathbf{J} = -\mathbf{I}_{2M}, \quad \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I}_{2M}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \quad (2.2)$$

Z dwóch wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2M}$ i macierzy $\mathbf{J}$ stopnia $2M$ można utworzyć algebraiczną formę dwuliniową¹

$$[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{J} \mathbf{y}), \quad (2.3)$$

która nosi nazwę **formy symplektycznej**. Jest ona antysymetryczna, gdyż

$$[\mathbf{y}|\mathbf{x}] = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{J} \mathbf{x}) = (\mathbf{J} \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{J} \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{J}^T \mathbf{y} = -\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{y} = -[\mathbf{x}|\mathbf{y}],$$

gdzie skorzystaliśmy z przemienności iloczynu skalarnego i antysymetryczności macierzy $\mathbf{J}$. Jak zwykle, antysymetryczność oznacza

$$[\mathbf{x}|\mathbf{x}] = -[\mathbf{x}|\mathbf{x}] = 0. \quad (2.4)$$

Jeśli w wektorach $2M$ -wymiarowych wydzielimy dwa M -wymiarowe bloki, na przykład

$$\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{y} = \text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{P}),$$

to forma symplektyczna jest różnicą iloczynów skalarnych

$$[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{q}^T \mathbf{P} - \mathbf{p}^T \mathbf{Q}. \quad (2.5)$$

¹Forma dwuliniowa to funkcja, która dwóm wektorom przyporządkowuje skalar i jest liniowa względem obu argumentów. Najbardziej znany przykład to iloczyn skalarny wektorów.

2.1.2 Definicja macierzy symplektycznych

Pamiętamy, że przekształcenia ortogonalne

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}' = \mathbf{M}\mathbf{y},$$

zachowują iloczyn skalarny, gdyż

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = (\mathbf{M}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{M}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

W podobny sposób możemy zdefiniować liniowe przekształcenia symplektyczne

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}' = \mathbf{S}\mathbf{y},$$

postulując, aby dla każdej pary $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ zachowywały one wartość formy symplektycznej

$$[\mathbf{x}' | \mathbf{y}'] = [\mathbf{S}\mathbf{x} | \mathbf{S}\mathbf{y}] = [\mathbf{x} | \mathbf{y}]. \quad (2.6)$$

To oznacza warunek

$$\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S} = \mathbf{J}, \quad (2.7)$$

i każdą macierz $\mathbf{S}$, która go spełnia, nazywamy **macierzą symplektyczną**.

Korzystając z własności (2.2) łatwo można sprawdzić, że macierz standardowa $\mathbf{J}$ jest macierzą symplektyczną, gdyż

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{J} = \mathbf{I} \mathbf{J} = \mathbf{J}$$

(od tego momentu opuszczamy indeks $2M$ macierzy jednostkowej dla skrócenia zapisu). Także macierz jednostkowa $\mathbf{I}$ jest macierzą symplektyczną:

$$\mathbf{I}^T \mathbf{J} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{I} = \mathbf{J} \mathbf{I} = \mathbf{J}.$$

2.1.3 Grupa symplektyczna

Pokażemy teraz, że macierze symplektyczne stopnia $2M$ z działaniem mnożenia macierzy tworzą grupę, nazywaną **grupą symplektyczną** $Sp(2M)$.

Najpierw musimy wykazać, że iloczyn dwóch macierzy symplektycznych daje macierz symplektyczną, czyli że mnożenie jest działaniem wewnętrznym w $Sp(2M)$. Niech $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in Sp(2M)$. Wtedy, wychodząc od macierzy $\mathbf{J}$, możemy zastosować dwa razy definicję (2.7)

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}_2^T \mathbf{J} \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_2^T (\mathbf{S}_1^T \mathbf{J} \mathbf{S}_1) \mathbf{S}_2 = (\mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_1^T) \mathbf{J} (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) = (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)^T \mathbf{J} (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2),$$

a to znaczy, że $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$ jest macierzą symplektyczną.

Pozostały do sprawdzenia trzy warunki: łączność mnożenia, istnienie elementu neutralnego w zbiorze macierzy symplektycznych oraz istnienie elementu odwrotnego dla każdej macierzy symplektycznej. Pierwsze dwa są spełnione, gdyż łączność jest podstawową cechą iloczynu macierzy, zaś jego element neutralny, macierz $\mathbf{I}$, jest macierzą symplektyczną, co pokazaliśmy wyżej. Pozostaje więc problem: czy każda macierz symplektyczna $\mathbf{S}$ posiada macierz odwrotną $\mathbf{S}^{-1}$, a jeśli tak, to czy $\mathbf{S}^{-1}$ jest macierzą symplektyczną?

O odwracalności macierzy decyduje wartość wyznacznika, która nie może być równa 0. Można to sprawdzić w prosty sposób. Wykorzystujemy definicję (2.7) oraz twierdzenie, w myśl którego wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi ich wyznaczników

$$\det(\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S}) = \det \mathbf{J} \Rightarrow \det \mathbf{S}^T \det \mathbf{J} \det \mathbf{S} = \det \mathbf{J}.$$

Ponieważ $\det \mathbf{J} = 1$ i $\det \mathbf{S}^T = \det \mathbf{S}$, to

$$(\det \mathbf{S})^2 = 1 \neq 0.$$

Co więcej, można udowodnić, że

$$\det \mathbf{S} = 1. \quad (2.8)$$

Niestety – dowód, że $\det \mathbf{S} \neq -1$ nie należy do trywialnych i pominiemy go.

Skoro wyznacznik macierzy symplektycznej jest różny od zera, to każda macierz symplektyczna posiada macierz odwrotną $\mathbf{S}^{-1}$, dla której

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Czy $\mathbf{S}^{-1}$ jest również macierzą symplektyczną? Łatwo to sprawdzić:

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}^T \mathbf{J} \mathbf{I} = (\mathbf{S} \mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{J} (\mathbf{S} \mathbf{S}^{-1}) = (\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S}) (\mathbf{S}^{-1}).$$

A ponieważ $\mathbf{S}$ jest symplektyczna, to środkowy iloczyn wynosi $\mathbf{J}$ i

$$\mathbf{J} = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1},$$

co w świetle definicji (2.7) oznacza, że $\mathbf{S}^{-1}$ jest macierzą symplektyczną.

Okazuje się przy tym, że związek między $\mathbf{S}^{-1}$ i $\mathbf{S}$ jest niemal równie prosty, jak w wypadku macierzy ortogonalnych, gdzie $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} &= \mathbf{I}, & / \mathbf{S}^T \mathbf{J} \times \\ (\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S}) \mathbf{S}^{-1} &= \mathbf{S}^T \mathbf{J}, \\ \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1} &= \mathbf{S}^T \mathbf{J}, & / \mathbf{J}^T \times \\ \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1} &= \mathbf{J}^T \mathbf{S}^T \mathbf{J}, \end{aligned}$$

Korzystając z (2.2) dochodzimy do

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{J}^T \mathbf{S}^T \mathbf{J}. \quad (2.9)$$

W grupie symplektycznej mamy jeszcze jedną interesującą własność: $\mathbf{S}^T \in Sp(2M)$. Zaczniemy od

$$\mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Podstawiamy (2.9), co daje

$$\mathbf{S} \mathbf{J}^T \mathbf{S}^T \mathbf{J} = \mathbf{I}.$$

Mnożymy prawostronnie przez $\mathbf{J}$

$$\mathbf{S} \mathbf{J}^T \mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{J} = \mathbf{J}.$$

i uwzględniając $\mathbf{J} \mathbf{J} = -\mathbf{I}$ oraz $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ z własności (2.2), dochodzimy do

$$\mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^T = \mathbf{J}. \quad (2.10)$$

To zaś jest równoważne stwierdzeniu, że $\mathbf{S}^T$ spełnia warunek (2.7), gdyż

$$\mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^T = (\mathbf{S}^T)^T \mathbf{J} (\mathbf{S}^T) = \mathbf{J}.$$

2.2 Równania kanoniczne Hamiltona

Niech M będzie liczbą naturalną zwaną liczbą stopni swobody. Wprowadzimy następujące obiekty:

- Rzeczywista zmienna t będzie zmienną niezależną układu równań różniczkowych.
- Wektor $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_M)^T$ nazwiemy **współrzędnymi uogólnionymi**. Należy on do M -wymiarowej **przestrzeni konfiguracyjnej**.
- Wektor $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_M)^T$ nazwiemy **pędami uogólnionymi**. Należy on do M -wymiarowej **przestrzeni pędów**.
- O parze zmiennych q_j oraz Q_j (z tym samym indeksem) mówimy, że są kanonicznie sprzężone.
- Wektor $\boldsymbol{\xi} = \text{col}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ nazwiemy **wektorem stanu**. Należy on do $2M$ -wymiarowej **przestrzeni fazowej**.
- Funkcję skalarną $\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ nazwiemy **funkcją Hamiltona** lub **hamiltonianem**. Powinna być ona funkcją różniczkowalną względem wszystkich zmiennych.

Równaniami kanonicznymi Hamiltona nazywać będziemy układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu $2M$ w postaci

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H}, \quad (2.11)$$

gdzie

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt},$$

symbol $\mathbf{J}$ oznacza standardową macierz symplektyczną stopnia $2M$ (2.1), zaś gradient

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} = D_{\boldsymbol{\xi}}^T = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{2M}} \right)^T. \quad (2.12)$$

Jeśli wydzielić w wektorze stanu $\boldsymbol{\xi}$ bloki zawierające współrzędne uogólnione $\mathbf{q}$ i pędy uogólnione $\mathbf{Q}$, to stwierdzamy, że układ (2.11)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_M \\ -\mathbf{I}_M & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} \\ \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{H} \end{pmatrix},$$

można rozbić na

$$\dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{H}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = -\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}, \quad (2.13)$$

albo, wypisując osobno pary dla każdego stopnia swobody i

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \quad \frac{dQ_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.14)$$

Dla zadanej funkcji $\mathcal{H}$, generującej prawe strony równań kanonicznych (2.11), (2.13) lub (2.14), rozwiązaniem są współrzędne i pędy uogólnione $\mathbf{q}(t)$ i $\mathbf{Q}(t)$ jako funkcje zmiennej niezależnej t .

Równania kanoniczne mają dwie podstawowe własności, które zawrzemy w Twierdzeniach 3 i 4.

TWIERDZENIE 3 Jeżeli hamiltonian $\mathcal{H}$ układu równań kanonicznych nie zależy od zmiennej niezależnej t w sposób jawny, to jest on całką pierwszą tego układu, czyli

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \text{const.} \quad (2.15)$$

dla każdego rozwiązania $\mathbf{q}(t), \mathbf{Q}(t)$ równań kanonicznych.

A oto dowód tego twierdzenia:

DOWÓD: Jeśli funkcje opisujące zależność wektora stanu $\boldsymbol{\xi}(t)$ od zmiennej niezależnej t są rozwiązaniem równań kanonicznych z funkcją Hamiltona $\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, t)$, to zgodnie z zasadą różniczkowania funkcji złożonej mamy

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{j=1}^{2M} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Podstawiając prawe strony równań kanonicznych (2.11) zamiast $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, otrzymamy

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H} \cdot (\mathbf{J} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H}) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Rozpoznamy w tym równaniu formę symplektyczną (2.3)

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H} \cdot (\mathbf{J} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H}) = [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H} | \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{H}] = 0,$$

która wynosi 0 z powodu antysymetryczności (2.4). Pozostaje więc

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (2.16)$$

co prowadzi do wniosku, że gdy $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, to również $\dot{\mathcal{H}} = 0$, więc hamiltonian jest stały – jak w równaniu (2.15).

Z samej postaci równań kanonicznych wynika kolejna ważna własność.

TWIERDZENIE 4 Jeżeli hamiltonian $\mathcal{H}$ pewnego układu nie zależy od jednej ze zmiennych kanonicznych, to sprzężona z nią zmienna jest stałą ruchu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0 &\Rightarrow Q_i = \text{const.} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0 &\Rightarrow q_i = \text{const.} \end{aligned}$$

Widać to wprost ze struktury równań (2.14).

Zmienna, która nie występuje w funkcji Hamiltona nosi nazwę **zmiennej cyklicznej**.

2.3 Kanoniczne nawiasy Poissona

Niech $\boldsymbol{\xi}$ oznacza $2M$ -wymiarowy wektor stanu $\text{col}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ w przestrzeni fazowej, zaś F i G dowolne funkcje skalarne zmiennych $\boldsymbol{\xi}$. Załóżmy także, że ewolucja wektora stanu $\boldsymbol{\xi}$ zadana jest funkcją Hamiltona $\mathcal{H}$.

Stawiamy teraz pytanie, jak wygląda pochodna dowolnej funkcji $F(\boldsymbol{\xi}, t)$ względem zmiennej niezależnej t ? Korzystając z zasady różniczkowania funkcji złożonej uzyskujemy prosty wzór

$$\dot{F}(\boldsymbol{\xi}, t) = \nabla F \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial F}{\partial t} = D_{\boldsymbol{\xi}} F \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

gdzie ∇ oznacza $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$. Sięgając do równań Hamiltona zastępujemy $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ przez prawą stronę (2.11) i otrzymujemy

$$\dot{F} = (\nabla F)^T \mathbf{J} \nabla \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} = [\nabla F | \nabla \mathcal{H}] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.17)$$

W powyższym wzorze pojawił się ważny obiekt matematyczny zwany **kanonicznym nawiasem Poissona**.

Kanonicznym nawiasem Poissona dwóch funkcji F i G nazywamy operator różniczkowy $\{F, G\}$ zdefiniowany jako

$$\{F, G\} = (\nabla F)^T \mathbf{J} \nabla G = [\nabla F | \nabla G] = \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} - \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (2.18)$$

Tam, gdzie będzie to ważne, dodawać będziemy do nawiasu Poissona indeks informujący o zmiennych kanonicznych względem których liczone są pochodne cząstkowe. Na przykład, we wzorze (2.18) mamy $\{F, G\}_{\boldsymbol{\xi}}$.

Wprowadzając nawias Poissona możemy zapisać równania kanoniczne (2.11) w jeszcze prostszej postaci

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \{\boldsymbol{\xi}, \mathcal{H}\}, \quad (2.19)$$

a dla dowolnej funkcji $F(\boldsymbol{\xi}, t)$, w świetle równania (2.17),

$$\frac{dF}{dt} = \{F, \mathcal{H}\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Nawias Poissona posiada zarówno właściwości typowe dla każdego liniowego operatora różniczkowego (liniowość i działanie na iloczyn) jak i własności zbliżone do iloczynu wektorowego (antysymetria, tożsamość Jacobiego).

1. Antysymetryczność:

$$\{F, G\} = -\{G, F\}. \quad (2.21)$$

Oczywista konsekwencją antysymetryczności jest

$$\{F, F\} = 0.$$

2. Liniowość. Dla dowolnych funkcji F, G, H i stałych α, β zachodzi,

$$\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha \{F, H\} + \beta \{G, H\}. \quad (2.22)$$

W świetle własności (2.21) oznacza to w istocie dwuliniowość nawiasu Poissona (liniowość ze względu na oba argumenty).

3. Działanie na iloczyn funkcji:

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}. \quad (2.23)$$

Także i ta własność dotyczy również drugiego argumentu.

4. Tożsamość Jacobiego:

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0. \quad (2.24)$$

Dla porównania, dowolne trzy wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ spełniają

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Właściwie należałoby stwierdzić, że każdy operator spełniający warunki 1-4 nazywamy nawiasem Poissona, natomiast szczególny przypadek (2.18) to kanoniczny nawias Poissona.

Warto też wiedzieć, że dla funkcji złożonej $F(G(\boldsymbol{\xi}))$ mamy

$$\{F(G(\boldsymbol{\xi})), H(\boldsymbol{\xi})\} = F'(G) \{G, H\}, \quad (2.25)$$

a więc obowiązuje standardowa reguła różniczkowania funkcji złożonej.

CDN

Spis treści

1	Równania ruchu w formalizmie newtonowskim	1
1.1	Formalizm newtonowski	1
1.2	Wahadło matematyczne, oscylator harmoniczny i oscylator Duffinga	4
1.3	Metoda uzmienniania stałych	7
1.4	Uzmiennianie stałych oscylatora harmonicznego – oscylator Duffinga	9
1.5	Elementy oskulacyjne i równania Gaussa	13
1.5.1	Uzmiennione całki ruchu	14
1.5.2	Równanie dla póloli wielkiej	15
1.5.3	Równanie dla mimośrodów	16
1.5.4	Kąty Eulera a prędkość kątowna	16
1.5.5	Równania dla oskulacyjnej długości węzła wstępującego i nachylenia	19
1.5.6	Równanie dla oskulacyjnego argumentu perycentrum	21
1.5.7	Równania dla zmian anomalii	23
1.5.8	Składowe siły zaburzające	25
1.5.9	Ostateczna postać wzorów Gaussa	28
1.5.10	Elementy nieosobliwe	30
1.6	Przykładowe zastosowania równań Gaussa	32
1.6.1	Wpływ oporu ośrodka na elementy oskulacyjne.	32
1.6.2	Manewry orbitalne (zmiana nachylenia)	34
2	Formalizm kanoniczny	36
2.1	Macierze i formy symplektyczne	36
2.1.1	Standardowa macierz symplektyczna i forma symplektyczna	36
2.1.2	Definicja macierzy symplektycznych	38
2.1.3	Grupa symplektyczna	38

2.2	Równania kanoniczne Hamiltona	41
2.3	Kanoniczne nawiasy Poissona	43