Sławomir Breiter

Mechanika nieba

I r. Astron. (II st.)

wykład jest kontynuacją przedmiotu
Matematyczne podstawy mechaniki nieba

wersja 28.10.2026

Rozdział 1

Zagadnienie N ciał

1.1 Sformułowanie zagadnienia w dowolnym układzie inercjalnym

Zagadnienie N ciał możemy śmiało uznać za jeden z najważniejszych i najstarszych problemów mechaniki nieba. Zwięźle można wyrazić to zagadnienie następująco:

> Określić ruch układu N punktów materialnych pod wpływem ich wzajemnego przyciągania.

Podana definicja wymaga jednak rozwinięcia. Zacznijmy od tego, co rozumiemy przez „określić ruch": w najdalej idącej wersji oznacza to podanie jawnej zależności położeń i prędkości wszystkich punktów materialnych od czasu, ale czasem poprzestajemy na słabszych wymaganiach – na przykład chcemy znać tylko sam kształt orbit ciał. Z kolei przez punkty materialne możemy także rozumieć kule z izotropowym rozkładem gęstości (por. wzory opisujące potencjał kuli we *Wstępie do mechaniki nieba*).

Łatwo sobie uświadomić, że formułując zagadnienie N ciał siedemnastowieczni mechanicy nieba i ich następcy mierzyli wysoko: chodziło przecież o poznanie przeszłości i przyszłości Układu Słonecznego, a nawet całego Wszechświata. Pierwszy sukces, jakim było rozwiązanie przypadku $N = 2$ (zagadnienia dwóch ciał), nie został jednak powtórzony ani dla dowolnego N, ani nawet dla jakiejś konkretnej wartości $N > 2$. Po trzech stuleciach badań zagadnienie to pozostaje nierozwiązane, a rozwój mechaniki nieba polega na coraz lepszym rozumieniu, czemu nie można go rozwiązać w przypadku ogólnym i jak daleko możemy się posunąć w rozwiązywaniu jego przypadków szczególnych lub konstruowaniu rozwiązań przybliżonych.

Jak wiemy, siły grawitacji mechaniki klasycznej są siłami potencjalnymi, więc nic nie stoi na przeszkodzie, aby analizować zagadnienie N ciał w ramach formalizmu kanonicznego. Na początek do opisu ruchu użyjemy wektora współrzędnych uogólnionych $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{3N}$, składającego się z N wektorów położenia poszczególnych mas w wybranym układzie inercjalnym,

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$$

ze współrzędnymi kartezjańskimi $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$. Symbolem col oznaczamy wektor kolumnowy zbudowany ze współrzędnych kolejnych wektorów wymienionych w nawiasie. Podobnie, wektor pędów uogólnionych $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3N}$, będzie się składał z N pędów newtonowskich (iloczyn masy i prędkości)

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{col}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_N),$$

gdzie $\boldsymbol{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^{\mathrm{T}}$. Mamy więc wektor stanu w $6N$-wymiarowej przestrzeni fazowej

$$\boldsymbol{\xi} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{R}),$$

i pozostaje nam ustalenie funkcji Hamiltona dla tego zagadnienia, która powinna być sumą energii kinetycznej i potencjalnej.

Potencjał układu N punktów materialnych uzyskujemy sumując potencjały kolejnych par punktów, a zatem

$$V_N = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{1.1}$$

gdzie k – stała Gaussa, m_i, m_j – masy ciał, zaś Δ_{ij} oznacza odległość między ciałami i oraz j

$$\Delta_{ij} = ||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \tag{1.2}$$

Ponieważ $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$, wzór (1.1) zawiera jedynie $N\,(N-1)/2$ różnych wyrazów, co tłumaczy pojawienie się czynnika $\frac{1}{2}$ (oddziaływanie wzajemne każdej pary pojawia się we wzorze dwa razy, co wymaga korekty). Czasem wygodniej jest przeprowadzić sumowanie tak, aby oddziaływanie każdej pary wchodziło do sumy tylko raz. Używamy wtedy postaci

$$V_N(\boldsymbol{r}) = -\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i||}. \tag{1.3}$$

Ponieważ energia kinetyczna ma postać

$$T(\boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{R}_i^2}{2\,m_i}, \tag{1.4}$$

funkcja Hamiltona $\mathcal{H}$ nie zależy jawnie od czasu i możemy ją zapisać w postaci sumy

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = T(\boldsymbol{R}) + V_N(\boldsymbol{r}), \tag{1.5}$$

gdzie energia kinetyczna dana jest wzorem (1.4), zaś energia potencjalna może mieć jedną z dwóch równoważnych postaci (1.1) lub (1.3).

Kanoniczne równania ruchu otrzymywane z (1.5) mają postać

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_1 \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{r}}_N \\ \dot{\boldsymbol{R}}_1 \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{R}}_i \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{R}}_N \end{pmatrix} = \mathbf{J}\,\nabla\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{R}_1}{m_1} \\ \cdots \\ \frac{\boldsymbol{R}_i}{m_i} \\ \cdots \\ \frac{\boldsymbol{R}_N}{m_N} \\ \sum_{j=2}^{N} \frac{k^2\,m_1\,m_j}{\Delta_{1j}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_1) \\ \cdots \\ \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{k^2\,m_N\,m_j}{\Delta_{Nj}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_N) \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

gdzie $\mathbf{J}$ oznacza standardową macierz symplektyczną

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3N} & \mathbf{I}_{3N} \\ -\mathbf{I}_{3N} & \mathbf{0}_{3N} \end{pmatrix},$$

zaś operator ∇ to

$$\nabla = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} = \mathrm{col}(\nabla_{\boldsymbol{r}}, \nabla_{\boldsymbol{R}}).$$

1.2 Całki ruchu zagadnienia N ciał

Ponieważ znane nam zagadnienie dwóch ciał możemy uznać za przypadek szczególny zagadnienia N ciał, sprawdzimy czy całki ruchu zagadnienia dwóch ciał dają się uogólnić na przypadek dowolnej liczby punktów materialnych.

1.2.1 Całka sił żywych (energii)

Ogromną zaletą formalizmu kanonicznego jest fakt, że całka energi wynika już z samego faktu istnienia niezależnej od czasu funkcji Hamiltona (1.5), a zatem mamy

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = \text{const.} \tag{1.7}$$

Całka energii (sił żywych) jest całką skalarną.

1.2.2 Całki środka masy (barycentrum)

Przyjrzyjmy się prawym stronom równań (1.6). Jeśli zsumować wszystkie wektory $\dot{\boldsymbol{R}}_i$, to otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{R}}_i \;=\; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{\Delta_{ij}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{0}, \tag{1.8}$$

ze względu na symetrię poszczególnych par wyrazów (n.p. $i = 1, j = N$ oraz $i = N, j = 1$ itd.).

Całkując obie strony (1.8) otrzymujemy trzy całki ruchu

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{a} = \textbf{const}, \tag{1.9}$$

zależne od stałych ruchu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$. Jeśli przypomnimy teraz związek między pędami a prędkościami ciał, to możemy przepisać całki (1.9) w postaci

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{a}.$$

Elementarne całkowanie prowadzi do kolejnych trzech całek ruchu

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{a}\, t + \boldsymbol{b}, \tag{1.10}$$

w których pojawiły się trzy nowe stałe ruchu $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

Sześć całek ruchu (1.9) i (1.10) nazywamy całkami środka masy (mniej poprawnie, choć powszechnie – całkami barycentrum). Nazwa jest o tyle uzasadniona, że położenie środka masy układu N ciał dane jest wektorem

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{1.11}$$

a w takim razie mamy

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = \frac{\boldsymbol{a}\,t + \boldsymbol{b}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \tag{1.12}$$

Innymi słowy, układ odniesienia związany z barycentrum układu N ciał jest układem inercjalnym, gdyż w wybranym układzie inercjalnym porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Warto zwrócić uwagę, że w układzie barycentrycznym suma pędów jest wektorem zerowym, gdyż oczywiście układ spoczywa względem samego siebie i mamy $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, co w świetle (1.9) prowadzi do $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{0}$.

1.2.3 Całki momentu pędu (pól)

Całkowity moment pędu układu N ciał jest sumą poszczególnych momentów pędu, to znaczy

$$\boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{G}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i. \tag{1.13}$$

Możemy teraz sprawdzić, że wektor $\boldsymbol{G}$ jest stały podczas ruchu układu. Różniczkując (1.13) dostajemy

$$\dot{\boldsymbol{G}} \;=\; \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{R}}_i \right).$$

Jeśli podstawić prawe strony równań (1.6) w miejsce $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ oraz $\dot{\boldsymbol{R}}_i$, to dochodzimy do

$$\dot{\boldsymbol{G}} \;=\; \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\boldsymbol{R}_i}{m_i} \times \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{r}_i \times \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{\Delta_{ij}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \right).$$

Pamiętając, że dla każdego wektora $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, upraszczamy $\dot{\boldsymbol{G}}$ do postaci

$$\dot{\boldsymbol{G}} \;=\; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{\Delta_{ij}^3}\; \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{0}.$$

W ostatnim kroku wykorzystaliśmy po raz kolejny antysymetrię sumowanych wyrazów – podobnie jak przy wyprowadzeniu całek barycentrum.

W ten sposób udowodniliśmy, że istnieją kolejne trzy całki zagadnienia N ciał

$$\boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i = \mathbf{const}, \tag{1.14}$$

zwane całkami momentu pędu lub całkami pól.

1.3 Niecałkowalność zagadnienia N ciał

Układ równań różniczkowych rzędu M uznajemy za całkowalny (tzn. rozwiązywalny) jeśli znajdziemy jego $M-1$ niezależnych całek pierwszych. Liczba $M-1$ bierze się stąd, że każda całka ruchu obniża rząd układu o 1, ale nie musimy obniżać rzędu aż do zera, gdyż równanie różniczkowe pierwszego rzędu potrafimy rozwiązać. Co prawda, dla układu kanonicznego rzędu $2K$ wystarcza do całkowalności K całek pierwszych w inwolucji (tzn. takich, że ich nawiasy Poissona są równe 0), ale nie będziemy z tego twierdzenia korzystać w obecnych rozważaniach.

Jeśli policzyć całki znalezione w poprzednim rozdziale, to bez względu na liczbę ciał N otrzymaliśmy 10 niezależnych całek ruchu (1 energii + 6 barycentrum + 3 pól). Więcej całek ruchu dla dowolnego N nie da się znaleźć, co pod koniec XIX wieku udowodnili najpierw Heinrich Bruns (1887) i Henri Poincaré (1896) dla $N=3$ a następnie Paul Painlevé (1898) dla dowolnego N. (Twierdzenie Brunsa-Poincarégo przedstawione jest w *Dynamice analitycznej* Whittakera). W najnowszej wersji (E. Julliard-Tosel, 2000) to klasyczne twierdzenie brzmi:

> W newtonowskim zagadnieniu N ciał z $N \geqslant 3$ w przestrzeni $\mathbb{R}^p$, gdzie $1 \leqslant p \leqslant N$, każda całka pierwsza, która jest algebraiczna[1] względem położeń, pędów i czasu jest algebraiczną funkcją całek: energii, momentu pędu ($p(p-1)/2$ składowych) oraz barycentrum ($2p$ składowych).

Ograniczmy się do klasycznego $p=3$. Jeśli nie można znaleźć innych całek niż wyżej wymieniona dziesiątka, to brakuje nam $6N-11$ i musimy uznać, że dla $N>2$ zagadnienie jest niecałkowalne. Innymi słowy, nie potrafimy rozwiązać zagadnienia N ciał dla $N>2$.

A jak wygląda sytuacja dla $N=2$? W zasadzie brakuje nam jednej całki ruchu, ale pamiętajmy, że poprzedni rozdział nie uwzględnił całki Laplace'a, która pojawia się tylko i wyłącznie w zagadnieniu dwóch ciał.

[1] Funkcja $y=f(x)$ jest algebraiczna stopnia n, jeśli spełnia równanie $\sum_{j=0}^{n} w_j(x)y^j = 0$, gdzie $w_j(x)$ są wielomianami.

Czy stwierdzenie niecałkowalności zagadnienia N ciał zamyka cały problem ? Na pewno nie. Jest to zagadnienie zbyt ważne, aby można było w tym momencie umyć ręce. Chcemy znać przyszłe i przeszłe konfiguracje planet i księżyców, stawiamy pytania o ewolucję gromad gwiazdowych i galaktyk a wszystkie te pytania wymagają rozwiązywania zagadnienia N ciał. Jeśli więc mamy do czynienia z zagadnieniem niecałkowalnym w przypadku ogólnym, to musimy próbować

1. znaleźć szczególne przypadki, które posiadają rozwiązanie dokładne,
2. zastosować metody, które dostarczą nam przybliżonego rozwiązania, ważnego na pewnym określonym odcinku czasu,
3. zbadać ruch w sytuacji, gdy przyciąganie jednego z ciał jest znacznie silniejsze niż wzajemne przyciąganie pozostałych.

Punkt 1. zaowocował wykryciem i badaniem tzw. konfiguracji centralnych; nie będziemy tu omawiać ich bliżej, ale przedstawimy je w zagadnieniu trzech ciał. Punkt 2. dotyczy tzw. metod numerycznych a punkt 3. – metod analitycznych mechaniki nieba. Każdej z nich poświęcimy więcej miejsca w przyszłości.

Tak czy inaczej, musimy zastanowić się nad wykorzystaniem znanych całek do sformułowania równań ruchu w postaci wygodniejszej niż (1.6).

1.4 Ważniejsze typy równań ruchu stosowane w zagadnieniu N ciał

1.4.1 Płaszczyzna niezmiennicza i zmienne barycentryczne

Równania ruchu (1.6) zostały wypisane w dowolnym układzie inercjalnym i z tego względu bywają nazywane „absolutnymi". Zauważmy jednak, że umiejscowienie takiego układu w przestrzeni jest raczej kłopotliwe. Aby wprowadzić bardziej dogodny układ odniesienia, wykorzystamy całki barycentrum (1.9) i (1.10) oraz całki pól (1.14).

Pamiętamy, że układ związany ze środkiem masy N ciał jest inercjalny. A zatem zacznijmy od umieszczenia środka układu współrzędnych w barycentrum układu. Możemy więc używać dotychczasowych symboli $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{R}$, uznając jedynie, że teraz są to położenia i pędy mierzone względem barycentrum. W układzie takim wektor środka masy to $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{0}$ i stałe barycentrum są również zerowe ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$). Położenie środka masy względem dowolnego z N

ciał można łatwo wyliczyć z (1.11). Na przykład, jeśli znamy tylko względne wektory położenia $N-1$ ciał mierzone od ciała pierwszego $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_1$ dla $i = 2, \ldots, N$, to warunek

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \boldsymbol{r}_i = m_1 \, \boldsymbol{r}_1 + \sum_{i=2}^{N} m_i \, (\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{0},$$

pozwala na umiejscowienie barycentrum względem masy m_1. Punkt ten będzie miał względem m_1 współrzędne $-\boldsymbol{r}_1$ czyli

$$-\boldsymbol{r}_1 = \frac{\sum_{i=2}^{N} m_i \, \boldsymbol{u}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

W podobny sposób można wykorzystać warunek

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{0}$$

do wyznaczenia prędkości barycentrum względem jednej z mas.

Ustalenie środka układu współrzędnych to jeszcze nie wszystko. Musimy znać kierunki jego osi i mieć pewność, że są one stałe względem „absolutnych" kierunków newtonowskiego Wszechświata. Co prawda, od strony czysto formalnej można by się zdecydować na przypadkowy wybór kierunków osi, na przykład wybierając dwa ciała i prowadząc płaszczyznę Oxy przez barycentrum oraz punkty, w których ciała te znajdują się w momencie t_0. Istnieje jednak ciekawszy sposób wyboru kierunków osi, który umożliwiają nam całki pól. Z całek pól wynika stałość kierunku wektora całkowitego momentu pędu $\boldsymbol{G}$, będąca kluczem do wprowadzenia tak zwanej płaszczyzny niezmienniczej.

> Płaszczyzna niezmiennicza układu N ciał przechodzi przez jego barycentrum i jest zorientowana tak, aby wektor $\boldsymbol{G}$ był do niej normalny.[2]

Wprowadzając płaszczyznę niezmienniczą określiliśmy jedynie kierunek osi Oz i płaszczyznę Oxy. Pozostaje wybór kieunku osi Ox, ale jest to problem drugorzędny. Na przykład, można ustalić położenie osi Ox uzgadniając ją z rzutem jednego z wektorów położeń $\boldsymbol{r}_i$ na płaszczyznę Oxy w wybranym momencie czasu t_0.

[2] Płaszczyzna niezmiennicza bywa nazywana płaszczyzną Laplace'a, ale ta druga nazwa może pojawić się i w innych zagadnieniach (ruch satelitów spłaszczonej planety) gdzie posiada odmienne znaczenie.

Jak widać, układ barycentryczny ma tę zaletę, że można go zdefiniować niejako wewnątrz układu N ciał, bez żadnych informacji o absolutnym układzie współrzędnych. Jest on czasem wykorzystywany do badania Układu Słonecznego jako szczególnego przypadku zagadnienia N ciał. Dynamiczna specyfika Układu Słonecznego polega na tym, że większość masy skupiona jest w Słońcu, a więc barycentrum znajduje się blisko środka Słońca, natomiast główny wkład do orbitalnego momentu pędu (mierzonego względem barycentrum) wnoszą planety. Większość planet porusza się w odległości kilku stopni od płaszczyzny niezmienniczej (Ekliptyka nachylona jest do niej o około 1°.5).

Na zakończenie powtórzmy, że w układzie barycentrycznym obowiązuje funkcja Hamiltona (1.5) i równania ruchu (1.6), z dodatkowymi warunkami

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{0}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{0}. \tag{1.15}$$

Warunki te można wykorzystać do obniżenia rzędu układu (1.6). Na przykład, można usunąć z układu równania dla $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ i $\dot{\boldsymbol{R}}_1$, przy czym pojawiające się w prawych stronach pozostałych równań wielkości $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{R}_1$ zastępujemy wektorami

$$\boldsymbol{r}_1 = -\frac{1}{m_1} \sum_{i=2}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i, \qquad \boldsymbol{R}_1 = -\sum_{i=2}^{N} \boldsymbol{R}_i.$$

Redukcja taka wygląda dość atrakcyjnie, ale w praktyce stosowana jest dość rzadko, gdyż z punktu widzenia metod analitycznych komplikuje ona postać równań ruchu, zaś z punktu widzenia metod numerycznych pozbawia nas możliwości kontroli wyników poprzez sprawdzenie zachowania całek środka masy.

1.4.2 Klasyczne równania ruchu względnego

Zagadnienie dynamiki Układu Słonecznego lub układu księżyców planety sugeruje nam, aby uprościć rozważania przez odniesienie położeń i prędkości do wyróżnionego punktu materialnego, takiego jak Słońce czy planeta centralna. Wybieg taki obniża rząd układu równań o 6 i stosowany był już od zarania mechaniki nieba. Aby wyróżnić jedno z ciał przyjmijmy dla niego indeks 0 a pozostałe ciała numerujmy od 1 do $N-1$.

W klasycznym ujęciu operujemy względnymi wektorami położenia, prędkości i przyspieszenia

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{u}}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{r}}_0, \qquad \ddot{\boldsymbol{u}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \ddot{\boldsymbol{r}}_0, \tag{1.16}$$

dla $i = 1, \ldots, N-1$. Oczywiście, $\boldsymbol{u}_0 = 0$, zaś

$$\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i. \tag{1.17}$$

Jak wyglądają wtedy równania ruchu ? Wróćmy do równań (1.6), przechodząc od $\dot{\boldsymbol{R}}_i$ do $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{\boldsymbol{R}}_i/m_i$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_0 &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{\Delta_{0j}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_0), \\
\ddot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{j=0, j\neq i}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{\Delta_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1.
\end{aligned}$$

Odejmując stronami $\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \ddot{\boldsymbol{r}}_0$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \ddot{\boldsymbol{r}}_0 &= \sum_{j=0, j\neq i}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{\Delta_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{\Delta_{0j}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_0) = \\
&= \sum_{j=0, j\neq i}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{\Delta_{ij}^3}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{||\boldsymbol{u}_j||^3}\boldsymbol{u}_j = \\
&= \left[-\frac{k^2\, m_0}{||\boldsymbol{u}_i||^3}\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{\Delta_{ij}^3}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i) \right] - \\
&\quad - \left[\frac{k^2\, m_i}{||\boldsymbol{u}_i||^3}\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} \frac{k^2\, m_j}{||\boldsymbol{u}_j||^3}\boldsymbol{u}_j \right].
\end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy $3N-3$ równań drugiego rzędu

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_i = -\frac{k^2\,(m_0 + m_i)}{u_i^3}\,\boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} k^2\, m_j \left[\frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{\Delta_{ij}^3} + \frac{\boldsymbol{u}_j}{u_j^3} \right], \tag{1.18}$$

gdzie

$$\Delta_{ij} = ||\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i||.$$

Równania (1.18) mają w zasadzie postać zaburzonych zagadnień względnych dwóch ciał dla mas m_0 i m_i, i jeśli tylko $m_j \ll m_0$, jak to jest w Układzie Słonecznym, można traktować ruch planet jako nieznacznie różniący się od keplerowskiego (w każdym razie, na krótkich odcinkach czasu ...).

Istotnym mankamentem klasycznych równań ruchu względnego jest brak potencjału i – co za tym idzie – ich niekanoniczny charakter oraz brak całki energii. Nie istnieje potencjał, z którego można by otrzymać wszystkie prawe

strony równań (1.18). Można co najwyżej wprowadzić $N-1$ „pseudopotencjałów" V_i, dla których

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_i = -\nabla_i V_i,$$

gdzie $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}$ oznacza wektor pochodnych cząstkowych względem składowych $\boldsymbol{u}_i$. „Pseudopotencjały" V_i dane są wzorami

$$V_i = -\frac{k^2(m_0+m_i)}{u_i} - \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} k^2 m_j \left[\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j}{u_j^3}\right]. \tag{1.19}$$

Wyrażenie objęte sumowaniem nazywamy funkcją perturbacyjną (zaburzającą), przy czym pierwszy wyraz w nawiasie kwadratowym nazywamy jej częścią główną a drugi – częścią pośrednią. Część główna opisuje bezpośredni wpływ $N-2$ ciał na i-tą masę, natomiast część pośrednia opisuje nieinercjalność układu współrzędnych odniesionego do masy m_0 wywołaną przyciąganiem tej masy przez pozostałe ciała.

W klasycznych teoriach analitycznych opisujących ruch planet, równania (1.18) stanowią punkt wyjścia do sformułowania $N-1$ układów równań planetarnych Lagrange'a dla keplerowskich zmiennych oskulacyjnych $N-1$ planet.

1.4.3 Kanoniczne równania ruchu względnego – zmienne Poincarégo

Przeniesienie układu współrzędnych do jednego z ciał jest zarówno pożądane matematycznie (obniżenie rzędu równań) jak i fizycznie zrozumiałe (wyróżniona rola masy centralnej). W wydaniu klasycznym płacimy za nie brakiem funkcji Hamiltona. Istnieją dwa główne sposoby kanonicznego opisu równań ruchu względnego: wykorzystujące zmienne Jacobiego i zmienne Poincarégo. Zaczniemy od tych drugich.

Zostały one zaproponowane pod koniec XIX w. przez Henri Poincarégo na podstawie prac Radaua. Wprowadźmy, podobnie jak w poprzednim paragrafie, położenia względne odniesione do masy m_0 – z tym, że wektor $\boldsymbol{u}_0$ nie będzie równy $\mathbf{0}$, lecz będzie oznaczał położenie masy centralnej względem barycentrum układu. Jeśli więc $\boldsymbol{r}_i$ oznacza barycentryczne wektory położenia, to

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{r}_0, \qquad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{1.20}$$

Zauważmy, że transformacja jest liniowa: nowe położenia

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{col}(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}),$$

można powiązać ze starymi

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N-1}),$$

wzorem macierzowym

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{r}, \tag{1.21}$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą blokową $3N \times 3N$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

składającą się wyłącznie z macierzy jednostkowych 3×3 oznaczonych $\mathbf{I}_3$ i macierzy zerowych $\mathbf{0}_3$, których trzy kolumny i trzy wiersze zawierają wyłącznie zera.

Warto już teraz zapytać, jak wygląda transformacja odwrotna

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{u}.$$

Zamiast wprost odwracać macierz $\mathbf{A}$ wystarczy przyjrzeć się związkom (1.20), których odwrócenie prowadzi do

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{u}_0, \qquad \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

a zatem

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Zauważmy, że przy okazji upewniliśmy się co do odwracalności transformacji $\boldsymbol{r} \leftrightarrow \boldsymbol{u}$, a więc możemy teraz postawić problem znalezienia nowych pędów

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{col}(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1, \ldots, \boldsymbol{U}_{N-1}),$$

które powinny być zależne, również liniowo, od barycentrycznych pędów

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{col}(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_{N-1}).$$

Jest to zagadnienie rozszerzenia kanonicznego liniowej transformacji punktowej, które rozważaliśmy w *Matematycznych podstawach mechaniki nieba* (Twierdzenie 5, wzór (3.23)). W świetle otrzymanych tam wyników, transformacja będzie kanoniczna gdy

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\, \boldsymbol{R}. \tag{1.24}$$

Transponując (1.23) mamy

$$\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 & \cdots & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

A zatem, dla $\boldsymbol{U}_0$ mamy, zgodnie z (1.15),

$$\boldsymbol{U}_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_i = \mathbf{0}, \tag{1.26}$$

natomiast dla wszystkich pozostałych ciał

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{R}_i, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{1.27}$$

Jak widać, interpretacja zmiennych względnych (heliocentrycznych) Poincarégo jest bardzo prosta: położenia planet odniesione są do masy głównej (Słońca) a pędy do barycentrum. Z tego też względu można czasem spotkać je pod nazwą „zmienne demokratyczne", którą ukuli Levison i Duncan pod koniec lat 1990.

Funkcja Hamiltona

Zdefiniowawszy położenia i pędy $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}$ musimy jeszcze znaleźć postać funkcji Hamiltona $\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{U})$. Zacznijmy od energii kinetycznej, która w zmiennych barycentrycznych miała postać (1.5)

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\boldsymbol{R}_i^2}{2\,m_i},$$

(uwzględniliśmy zmianę zakresu indeksu z $1, \ldots, N$ na $0, \ldots, N-1$). W świetle (1.27) możemy wyłączyć przed znak sumy $\boldsymbol{R}_0$ i przepisać T w postaci

$$T = \frac{\boldsymbol{R}_0^2}{2\,m_0} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\boldsymbol{U}_i^2}{2\,m_i}.$$

Ale jak wyrazić pęd $\boldsymbol{R}_0$ przy pomocy $\boldsymbol{U}$? Rozpisując właściwość (1.26) jako

$$\boldsymbol{R}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{0},$$

i podstawiając $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{U}_i$, dla $i \neq 0$, dostajemy

$$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{U}_0 - \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{U}_i,$$

a więc

$$\boldsymbol{R}_0^2 = \boldsymbol{U}_0^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{U}_i + \left(\sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{U}_i \right)^2.$$

Aby uporządkować wyrazy w kwadracie sumy i wyłączyć z nich sumę kwadratów pędów, przedstawmy kwadrat sumy w postaci tablicy

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{U}_1^2 & +\boldsymbol{U}_1 \cdot \boldsymbol{U}_2 & +\boldsymbol{U}_1 \cdot \boldsymbol{U}_3 & \ldots \\ +\boldsymbol{U}_2 \cdot \boldsymbol{U}_1 & +\boldsymbol{U}_2^2 & +\boldsymbol{U}_2 \cdot \boldsymbol{U}_3 & \ldots \\ +\boldsymbol{U}_3 \cdot \boldsymbol{U}_1 & +\boldsymbol{U}_3 \cdot \boldsymbol{U}_2 & +\boldsymbol{U}_3^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Pamiętając o symetrii $\boldsymbol{U}_i \cdot \boldsymbol{U}_j = \boldsymbol{U}_j \cdot \boldsymbol{U}_i$, możemy napisać

$$\left(\sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{U}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{U}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \boldsymbol{U}_i \cdot \boldsymbol{U}_j,$$

a zatem energia kinetyczna przybiera postać

$$T = T_0 + T_1, \tag{1.28}$$

gdzie

$$T_0 = \frac{\boldsymbol{U}_0^2}{2m_0} - \frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{U}_i, \tag{1.29}$$

zawiera pęd $\boldsymbol{U}_0$, a pozostałe wyrazy z $\boldsymbol{R}_0^2$ zostały włączone do

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i}\right)\boldsymbol{U}_i^2 + \frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1} \boldsymbol{U}_i \cdot \boldsymbol{U}_j. \tag{1.30}$$

Energia potencjalna V nie sprawia żadnych trudności. Wystarczy rozróżnić we wzorze (1.7) dwa przypadki: te dla których $i = 0$, gdy

$$\Delta_{0,j} = ||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_0|| = u_j,$$

oraz pozostałe, gdy $i \neq 0$ oraz

$$\Delta_{ij} = ||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|| = ||\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i||.$$

Mamy więc

$$V = -\sum_{i=0}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{ij}} = -\sum_{j=1}^{N-1}\frac{k^2 m_0 m_j}{u_j} - \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{1.31}$$

i ostatecznie funkcja Hamiltona przybiera postać

$$\mathcal{H}' = T_0 + \mathcal{K}, \tag{1.32}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \;=\; & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i}\boldsymbol{U}_i^2 + \frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\boldsymbol{U}_i \cdot \boldsymbol{U}_j - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{k^2 m_0 m_i}{u_i} - \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{ij}}.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Zauważmy, że w związku z całkami barycentrum $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{0}$, wyraz T_0 ma wartość równą 0 i – co do wartości – zachodzi $\mathcal{H}' = \mathcal{K}$. Nie możemy jednak z góry odrzucić wyrazu T_0 przed sprawdzeniem jaki jest wpływ jego pochodnych na równania ruchu.

Równania ruchu

Zacznijmy od wypisania równań ruchu generowanych przez hamiltonian (1.32), pozostawiając wyraz $\mathcal{K}$ w postaci nierozwiniętej. Widzimy wtedy, że dla ciała odniesienia mamy

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}}_0 &= \{\boldsymbol{u}_0, T_0 + \mathcal{K}\} = \nabla_{\boldsymbol{U}_0}(T_0 + \mathcal{K}) = \nabla_{\boldsymbol{U}_0} T_0 = \frac{1}{m_0}\boldsymbol{U}_0 - \frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{U}_j, \\ \dot{\boldsymbol{U}}_0 &= \{\boldsymbol{U}_0, T_0 + \mathcal{K}\} = -\nabla_{\boldsymbol{u}_0}(T_0 + \mathcal{K}) = \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{1.34}$$

zaś dla pozostałych ($i = 1, \ldots, N-1$)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}}_i &= \{\boldsymbol{u}_i, T_0 + \mathcal{K}\} = \nabla_{\boldsymbol{U}_i}(T_0 + \mathcal{K}) = -\frac{\boldsymbol{U}_0}{m_0} + \nabla_{\boldsymbol{U}_i}\mathcal{K}, \\ \dot{\boldsymbol{U}}_i &= \{\boldsymbol{U}_i, T_0 + \mathcal{K}\} = -\nabla_{\boldsymbol{u}_i}(T_0 + \mathcal{K}) = -\nabla_{\boldsymbol{u}_i}\mathcal{K}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Zauważmy, że skoro w układzie barycentrycznym $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{0}$, to równania (1.35) są w pełni niezależne od wyrazu T_0. Z drugiej strony, barycentryczna prędkość masy wyróżnionej $\dot{\boldsymbol{u}}_0$ zależy od pędów pozostałych ciał, ale – jak to zostało pokazane w Rozdz. 1.4.1 – rozwiązaniem pierwszego z równań (1.34 musi być

$$\boldsymbol{u}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} m_i \boldsymbol{u}_i}{\sum_{i=0}^{N-1} m_i}. \tag{1.36}$$

Mamy więc do czynienia z separacją układu, która pozwala na badanie ruchu $N-1$ ciał opisanego hamiltonianem $\mathcal{K}$ niezależnie od ruchu ciała odniesienia, który jest opisany hamiltonianem T_0 i możemy go odtworzyć z ruchu pozostałych ciał dzięki istnieniu całek barycentrum. Funkcji Hamiltona $\mathcal{K}$ z równania (1.33) używamy więc jedynie do tworzenia równań ruchu zmiennych $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{U}_i$ dla $i \geqslant 1$, co prowadzi do

$$\dot{\boldsymbol{u}}_i = \{\boldsymbol{u}_i, \mathcal{K}\} = \frac{\boldsymbol{U}_i}{m_i} + \frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{U}_j, \tag{1.37}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_i = \{\boldsymbol{U}_i, \mathcal{K}\} = -\frac{k^2 m_0 m_i}{u_i^3}\,\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} \frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{ij}^3}\,(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i)\,. \tag{1.38}$$

Jeśli zróżniczkować obie strony równań (1.37) i skorzystać z (1.38), to przekonamy się, że równania te są formalnie równoważne klasycznym (1.18). W porównaniu z klasycznymi równania te mają jednak istotną przewagę – posiadają funkcję Hamiltona i są kanoniczne. Jednak fakt, że prędkości $\dot{u}_i$ nie są

wprost proporcjonalne do odpowiednich pędów $\boldsymbol{U}_i$, spowodował, że zmienne Poincarégo nie miały dobrej reputacji przez prawie 100 lat, choć przecież ten sam mankament wykazuje na przykład powszechnie używany układ rotujących osi...

W sytuacji gdy masa m_0 jest znacznie większa od pozostałych m_i okazuje się, że można rozbić funkcję Hamiltona $\mathcal{K}$ na dwie części

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1,$$

dla których $|\mathcal{K}_0| \gg |\mathcal{K}_1|$. Ściślej rzecz biorąc, mamy

$$\mathcal{K}_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{m_i}\boldsymbol{U}_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{k^2 m_0 m_i}{u_i}, \tag{1.39}$$

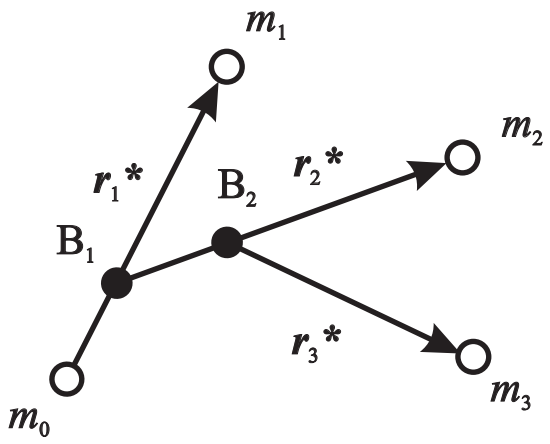
$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &= \frac{1}{2\,m_0}\sum_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{U}_i^2 + \frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\boldsymbol{U}_i\cdot\boldsymbol{U}_j - \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{ij}} = \\ &= \frac{1}{2m_0}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{U}_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{ij}},\end{aligned} \tag{1.40}$$

przy czym część $\mathcal{K}_0$ opisuje ruch będący prostym złożeniem $N-1$ zagadnień dwóch ciał z zaniedbywalną masą planet, natomiast $\mathcal{K}_1$ wytwarza zaburzenia ruchów Keplerowskich wynikające z wzajemnego przyciągania $N-1$ mas.

Na zakończenie dodajmy, że zmienne względne Poincarégo nie naruszają definicji ani wartości momentu pędu układu. Jeśli $\boldsymbol{G}$ jest barycentrycznym momentem pędu zdefiniowanym jak w (1.13), to mamy

$$\boldsymbol{G} = \sum_{i=0}^{N-1}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{R}_i = \sum_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{U}_i. \tag{1.41}$$

W ostatnim wyrażeniu opuściliśmy $\boldsymbol{u}_0\times\boldsymbol{U}_0$, gdyż $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{0}$.



Rysunek 1.1: Łańcuch barycentryczny definiujący zmienne Jacobiego.

WYKŁAD 4

1.4.4 Kanoniczne równania ruchu względnego - zmienne Jacobiego

Pora teraz na zmienne Jacobiego, którym poświęcimy mniej miejsca. Ich ewentualna przewaga nad zmiennymi Poincarégo pojawia się w specyficznych przypadkach i niemal wyłącznie przy małej liczbie N. Wynika to z dość złożonych związków między współrzędnymi a odległościami względnymi.

Aby zdefiniować zmienne Jacobiego $\boldsymbol{r}^*$, $\boldsymbol{R}^*$ jako funkcje zmiennych barycentrycznych $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$, zaczynamy od kluczowego wektora

$$\boldsymbol{r}_0^* = \frac{m_0\,\boldsymbol{r}_0 + m_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + m_{N-1}\boldsymbol{r}_{N-1}}{m_0 + m_1 + \ldots + m_{N-1}} = \boldsymbol{0}.$$

Jest to wybór odmienny niż $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{r}_0$ ze zmiennych Poincarégo: $\boldsymbol{r}_0^*$ jest barycentrycznym wektorem położenia środka masy, którego wartość wynosi $\boldsymbol{0}$, ale jego pochodne względem współrzędnych każdego ciała nie są zerowe.

Współrzędne kolejnych ciał $\boldsymbol{r}_i^*$ zadajemy poprzez tak zwany łańcuch barycentryczny (por. rys. 1.1). Położenie masy m_1 jest odniesione do masy m_0, a więc

$$\boldsymbol{r}_1^* = \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0,$$

ale już położenie masy m_2 (wektor $\boldsymbol{r}_2^*$) określamy względem barycentrum B_1 układu dwóch ciał m_0 i m_1, to znaczy

$$\boldsymbol{r}_2^* = \boldsymbol{r}_2 - \frac{m_0\boldsymbol{r}_0 + m_1\boldsymbol{r}_1}{m_0 + m_1}.$$

Położenie masy m_3 określamy względem barycentrum B_2 układu trzech ciał m_0, m_1, m_2, więc

$$\boldsymbol{r}_3^* = \boldsymbol{r}_3 - \frac{m_0\boldsymbol{r}_0 + m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$

i tak dalej.

Wprowadzając pomocniczy symbol

$$M_j = \sum_{i=0}^{j} m_i, \tag{1.42}$$

możemy zapisać liniową transformację punktową ze wspólrzędnych barycentrycznych do współrzędnych Jacobiego wzorami

$$\boldsymbol{r}_0^* = \frac{1}{M_{N-1}} \sum_{j=0}^{N-1} m_j\, \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{0}, \tag{1.43}$$

$$\boldsymbol{r}_i^* = \boldsymbol{r}_i - \frac{1}{M_{i-1}} \sum_{j=0}^{i-1} m_j \boldsymbol{r}_j, \quad i > 0. \tag{1.44}$$

Kanoniczne rozszerzenie transfromacji punktowej jest bardziej złożone niż dla zmiennych Poincarégo, ale ostatecznie prowadzi do pędów

$$\boldsymbol{R}_0^* = \sum_{j=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_j = \boldsymbol{0}, \tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{R}_i^* = \frac{1}{M_i}\left(M_{i-1}\boldsymbol{R}_i - m_i \sum_{j=0}^{i-1} \boldsymbol{R}_j \right), \quad i > 0. \tag{1.46}$$

Warto odnotować, że pęd $\boldsymbol{R}_0^*$, sprzężony z położeniem środka masy układu, to całkowity barycentryczny pęd układu, a więc i on jest wektorem zerowym, choć jego pochodne względem pędów barycentrycznych nie są zerowe.

Odwracając transformację otrzymujemy dla współrzędnych

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_0 &= \boldsymbol{r}_0^* - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{m_j}{M_j}\, \boldsymbol{r}_j^*, \\
\boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{r}_0^* + \frac{M_{i-1}}{M_i}\, \boldsymbol{r}_i^* - \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{m_j}{M_j}\, \boldsymbol{r}_j^*, \quad 0 < i < N-1, \\
\boldsymbol{r}_{N-1} &= \boldsymbol{r}_0^* + \frac{M_{N-2}}{M_{N-1}}\, \boldsymbol{r}_{N-1}^*,
\end{aligned} \tag{1.47}$$

a dla pędów

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_0 &= \frac{m_0}{M_{N-1}}\boldsymbol{R}_0^* - m_0\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\boldsymbol{R}_j^*}{M_{j-1}},\\
\boldsymbol{R}_i &= \frac{m_i}{M_{N-1}}\boldsymbol{R}_0^* + \boldsymbol{R}_i^* - m_i\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{\boldsymbol{R}_j^*}{M_{j-1}}, \quad 0<i<N-1, \qquad (1.48)\\
\boldsymbol{R}_{N-1} &= \frac{m_{N-1}}{M_{N-1}}\boldsymbol{R}_0^* + \boldsymbol{R}_{N-1}^*.
\end{aligned}$$

Jeśli chodzi o funkcję Hamiltona $\mathcal{H}^* = T_0 + \mathcal{K}^*$, opisującą ruch układu, to jedynym wyrazem zwierającym zmienne z indeksem 0 jest wyraz energii kinetycznej

$$T_0 = \frac{\boldsymbol{R}_0^* \cdot \boldsymbol{R}_0^*}{2M_{N-1}},$$

który generuje równania $\dot{\boldsymbol{R}}_0^* = \dot{\boldsymbol{r}}_0^* = \boldsymbol{0}$, prowadzące do całek barycentrum. Natomiast $\mathcal{K}^* = T + V$ jest hamiltonianem zredukowanego układu rzędu $6(N-1)$ w zmiennych Jacobiego, więc separacja zagadnienia jest tu bardziej przejrzysta niż w zmiennych Pioncarégo i dopuszcza przyjęcie dowolnego układu inercjalnego zamiast barycentrycznego bez wpływu na prostotę równań.

Uwolniona od pędu zerowego energia kinetyczna ma postać prostą

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{M_i}{M_{i-1}}\,\frac{\boldsymbol{R}_i^* \cdot \boldsymbol{R}_i^*}{m_i}, \qquad (1.49)$$

natomiast energia potencjalna komplikuje się w sposób zatrważający: pomijając

$$\Delta_{01} = ||\boldsymbol{r}_1^*||,$$

wszystkie pozostałe odległości wzajemne Δ_{ij} są skomplikowanymi funkcjami wielu różnych $\boldsymbol{r}_k^*$, gdyż

$$\Delta_{ij} = ||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i||,$$

i w świetle wzoru (1.47)

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ij}(\boldsymbol{r}_i^*, \boldsymbol{r}_{i+1}^*, \ldots, \boldsymbol{r}_j^*),$$

jeśli $j > i$. To właśnie postać energii potencjalnej stanowi piętę achillesową zmiennych Jacobiego, sprawiając, że zmienne te są dziś coraz skuteczniej wypierane przez zmienne Poincarégo w zagadnieniach typu planetarnego.

Są jednak chętnie stosowane w układach hierarchicznych, gdzie $r^*_{p+1} \gg r^*_p$ – zwłaszcza w potrójnych układach gwiazdowych tego typu. Pojawiają się także modyfikacje tych zmiennych lepiej dostosowane do innych typów hierarchii.

1.5 Moment bezwładności układu N ciał

Mechanika nieba nieba skupia się głównie na opisie ruchu poszczególnych mas w zagadnieniu N ciał. Tymczasem astrofizyka, astronomia gwiazdowa i pokrewne dziedziny astronomii wykazują większe zainteresowanie globalnymi parametrami opisującymi stan układu. Jest to sytuacja zbliżona do rozważań nad stanem gazu – termodynamika nie próbuje zgłębiać ruchu każdej cząstki osobno, lecz analizuje temperaturę czy ciśnienie gazu jako wspomniane „parametry globalne".

Przykładem takich rozważań, nie oddalających się zbytnio od głównego nurtu mechaniki nieba, może być analiza nie wspomnianego dotąd parametru globalnego, jakim jest moment bezwładności I układu N ciał. Jeśli masy numerujemy od 1 do N, to całkowity moment bezwładności definiujemy jako

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \, r_i^2, \tag{1.50}$$

gdzie $r_i^2 = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i$ oznacza kwadrat odległości i-tej masy od punktu, względem którego mierzymy moment bezwładności. Dla uproszczenia przyjmiemy, że punkt ten będzie zarazem środkiem inercjalnego układu współrzędnych. Już Lagrange udowodnił, że istnieje prosty związek między momentem bezwładności a energią całkowitą E i energią potencjalną V_N układu. Udowodniony przez niego wzór

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 4\,E - 2\,V_N, \tag{1.51}$$

zwany jest czasem twierdzeniem o wiriale.

Zaczniemy od udowodnienia wzoru (1.51), a następnie wskażemy jego związek z zachowaniem układu N ciał jako całości. Pierwsza pochodna momentu bezwładności ma postać

$$\frac{dI}{dt} = 2 \sum_{i=1}^{N} m_i \, \boldsymbol{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = 2 \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{R}_i.$$

Posłużyliśmy się tu związkami między prędkościami $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ a pędami $\boldsymbol{R}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$, które wynikają z równań ruchu (1.6). Druga pochodna momentu bezwład-

ności przyjmuje postać

$$\frac{d^2I}{dt^2} = 2\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{R}}_i\right) = 2\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\boldsymbol{R}_i\cdot\boldsymbol{R}_i}{m_i} + \boldsymbol{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{R}}_i\right).$$

Jak łatwo zauważyć, pierwszy wyraz w powyższej sumie jest powiązany bezpośrednio z energią kinetyczną T i w świetle wzoru (1.5) mamy

$$\frac{d^2I}{dt^2} = 4\,T + 2S_N, \tag{1.52}$$

$$S_N = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{R}}_i. \tag{1.53}$$

Musimy teraz znaleźć związek między pomocniczą wielkością S_N a energią potencjalną V_N zdefiniowaną poprzez (1.1). Podstawiając prawe strony równań ruchu (1.6) w miejsce $\dot{\boldsymbol{R}}_i$ otrzymamy

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}\boldsymbol{r}_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j. \end{aligned}$$

Pamiętając, że $\Delta_{ij} = ||\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|| = \Delta_{ji}$, możemy pierwszą sumę rozbić na dwie połowy i zmienić indeks z i na j w jednej z połówek

$$\begin{aligned} S_N &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}\boldsymbol{r}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}\boldsymbol{r}_j^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}\left(\boldsymbol{r}_j^2 - 2\,\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{r}_i^2\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}^3}\,||\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i||^2 = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{k^2\,m_i\,m_j}{\Delta_{ij}} = V_N. \end{aligned} \tag{1.54}$$

W ten sposób udowodniliśmy, że skoro $S_N = V_N$, zaś energia całkowita $E = T + V_N$, to istotnie

$$\ddot{I} = 4\,T + 2\,V_N = 4\,E - 2\,V_N.$$

dowodząc tym samym twierdzenia o wiriale (1.51).

Twierdzenie o wiriale pozwala nam na formułowanie dość ogólnych twierdzeń dotyczących na przykład dynamicznej trwałości układu N ciał. Układ taki nazwiemy dynamicznie trwałym, jeśli dla dowolnego momentu czasu wszystkie wzajemne odległości Δ_{ij} są ograniczone zarówno od góry jak i od dołu, to znaczy $0 < \Delta_{ij} \leqslant c$, gdzie c jest skończoną liczbą dodatnią. Ograniczenie z dołu gwarantuje nam brak kolizji punktów materialnych, natomiast ograniczenie z góry oznacza, że żadna z mas nie ucieknie w nieskończoność. C. G. Jacobi wykorzystał związek (1.51) do sformułowania twierdzenia, w myśl którego układ N ciał jest dynamicznie trwały tylko wtedy, jeśli jego energia całkowita E jest ujemna. Warunek konieczny (ale nie dostateczny !) $E < 0$, znany nam już z zagadnienia dwóch ciał, wynika wprost z analizy znaku $\ddot{I}$. Przyjmijmy dla uproszczenia, że I jest momentem bezwładności względem barycentrum układu N ciał; możemy wtedy utożsamić skończoność odległości względnych Δ_{ij} ze skończonością odległości od barycentrum r_i. Załóżmy teraz, że $E \geqslant 0$. Ponieważ V_N jest zawsze wielkością ujemną, to w tej sytuacji $\ddot{I} > 0$ i moment bezwładności dąży asymptotycznie do $+\infty$. Nieskończony moment bezwładności oznacza oczywiście nieograniczony wzrost conajmniej jednej z odległości r_i a więc ucieczkę z układu. Jak widać, nie można sobie wyobrazić trwałego układu N ciał z nieujemną energią całkowitą. W tej sytuacji, każdy układ trwały musi mieć energię ujemną, choć warunek $E < 0$ nie jest jeszcze dostatecznym warunkiem trwałości.

Na zakończenie przedyskutujmy jeszcze „postać średnią" twierdzenia o wiriale. Wiemy już, że układ pozostanie dynamicznie trwały jeśli nie wystąpi w nim systematyczny wzrost momentu bezwładności. Nie może także wystąpić systematyczny spadek I, gdyż jest to wielkość nieujemna z definicji, a w granicy $I \to 0$ oznaczałoby kolizję wszystkich mas w barycentrum. W takim razie, moment bezwładności układu trwałego oscyluje wokół pewnej wartości średniej $\langle I \rangle$, co oznacza $\langle \ddot{I} \rangle = 0$. Tak więc, uśredniając obie strony wzoru (1.51) dochodzimy do wniosku, że

$$\langle T \rangle = -\tfrac{1}{2}\,\langle V_N \rangle. \tag{1.55}$$

Wzór ten znany jest jako uśrednione twierdzenie o wiriale.

Rozdział 2

Zagadnienie trzech ciał

WYKŁAD 5

2.1 Równania ruchu i rozwiązania homograficzne Lagrange'a

Najprostszym przypadkiem zagadnienia N ciał dla $N > 2$ jest oczywiście zagadnienie trzech ciał. Zagadnienie to, wymagające zbadania ruchu trzech punktów materialnych pod wpływem sił wzajemnego przyciągania, należy do wyjątkowo zasłużonych w historii mechaniki nieba. Jako pierwszy musiał mu stawić czoła już Newton. Aby wykazać poprawność swojego prawa grawitacji, musiał on nie tylko wydedukować z niego prawa Keplera opisujące w przybliżeniu ruch planet, lecz również pokazać, że wyraźne odstępstwa ruchu Księżyca od ruchu keplerowskiego dają się wytłumaczyć wpływem Słońca jako trzeciego ciała układu Ziemia-Księżyc-Słońce. Próby skonstruowania teorii ruchu Księżyca skończyły się dla Newtona porażką, gdyż jak wiemy zagadnienie trzech ciał jest niecałkowalne. Gdy $N = 3$, ruch układu opisany jest kanonicznymi równaniami ruchu typu (1.6) z funkcją Hamiltona

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{R}_1^2}{m_1} + \frac{\boldsymbol{R}_2^2}{m_2} + \frac{\boldsymbol{R}_3^2}{m_3}\right) - \frac{k^2\, m_1\, m_2}{\Delta_{12}} - \frac{k^2\, m_1\, m_3}{\Delta_{13}} - \frac{k^2\, m_2\, m_3}{\Delta_{23}}, \qquad (2.1)$$

gdzie tradycyjnie $\Delta_{ij} = ||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i||$. Mamy tu 9 stopni swobody i układ równań 18 rzędu, który posiada jedynie 10 całek ruchu. Nawet w **zagadnieniu płaskim**, gdy wszystkie ciała poruszają sie w jednej płaszczyźnie, uogólnione twierdzenie Brunsa-Poincarégo z rozdziału 1.3 wyklucza całkowalność, gdyż układ płaski 12 rzędu posiada tylko 6 całek ruchu. Możemy jednak znaleźć rozwiązania szczególne, dla których potrafmy podać jawną zależność od

czasu wszystkich trzech ciał.

Zagadnienie trzech ciał było pierwszym spośród zagadnień N ciał, w którym stwierdzono występowanie tak zwanych *rozwiązań homograficznych* (znanych także jako *konfiguracje centralne*). Rozwiązania homograficzne w zagadnieniu N ciał to takie rozwiązania, dla których barycentryczna konfiguracja mas pozostaje samopodobna w trakcie ruchu. Podobieństwo konfiguracji mas w dwóch momentach czasu oznacza, że mogą one być wzajemnie na siebie przekształcone na drodze jednokładności („przeskalowania") i obrotu. Rozwiązania samopodobne dla których nie występuje obrót nazywamy *homotetycznymi* (jednokładnymi) a rozwiązania dla których nie występuje zmiana skali a tylko obrót nazywamy rozwiązaniami *równowagi względnej*. Z oczywistych względów nie jest możliwe aby rozwiązanie homograficzne było homotetyczną równowagą względną.

Istnieje twierdzenie Moultona, w myśl którego w zagadnieniu N ciał pojawia się $\frac{1}{2}N!$ rozwiązań homograficznych zwanych kolinearnymi. Wszystkie masy leżą wtedy na wspólnej prostej, zaś liczba $\frac{1}{2}N!$ odpowiada wszystkim możliwym uporządkowaniom mas. Tak więc, w zagadnieniu trzech ciał muszą istnieć trzy rozwiązania kolinearne, znane już Eulerowi. Odpowiadają one uporządkowaniu mas m_1, m_2, m_3, oraz m_1, m_3, m_2 i m_2, m_1, m_3. Oprócz rozwiązań kolinearnych mogą się pojawić inne typy rozwiązań homograficznych, lecz tu już nie ma reguł odpowiednich dla każdego N. W zagadnieniu trzech ciał takim niekolinearnym rozwiązaniem homograficznym jest ruch podczas którego trzy masy znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Rozwiązanie to zostało odkryte przez Lagrange'a, a ponieważ masy można rozmieścić w wierzchołkach trójkąta na dwa sposoby („prawoskrętnie" m_1, m_2, m_3 lub „lewoskrętnie" m_3, m_2, m_1), mówimy o pięciu rozwiązaniach homograficznych Lagrange'a.

Twierdzenie Lagrange'a z roku 1772 podsumowuje zasadnicze warunki wystąpienia i właściwości rozwiązań homograficznych w zagadnieniu trzech ciał.

> **TWIERDZENIE LAGRANGE'A:** W zagadnieniu trzech ciał o dowolnych masach istnieją rozwiązania dokładne o następujących właściwościach:
>
> 1. Ciała poruszają się we wspólnej płaszczyźnie zachowującej stałą orientację w przestrzeni.
> 2. Wypadkowa siła przyciągania działająca na każde z ciał jest

skierowana do barycentrum układu i wprost proporcjonalna do barycentrycznej odległości ciała.

3. W barycentrycznym układzie współrzędnych prędkości trzech mas tworzą jednakowe kąty z ich promieniami wodzącymi i są wprost proporcjonalne do odpowiednich odległości barycentrycznych.
4. Jeśli ciała tworzą trójkąt, to jest on równoboczny.
5. Ciała poruszają się po orbitach keplerowskich względem barycentrum

Dokładniejszą (choć nadal niekompletną) dyskusję tego twierdzenia znaleźć można w *Mechanice nieba* Wierzbińskiego.

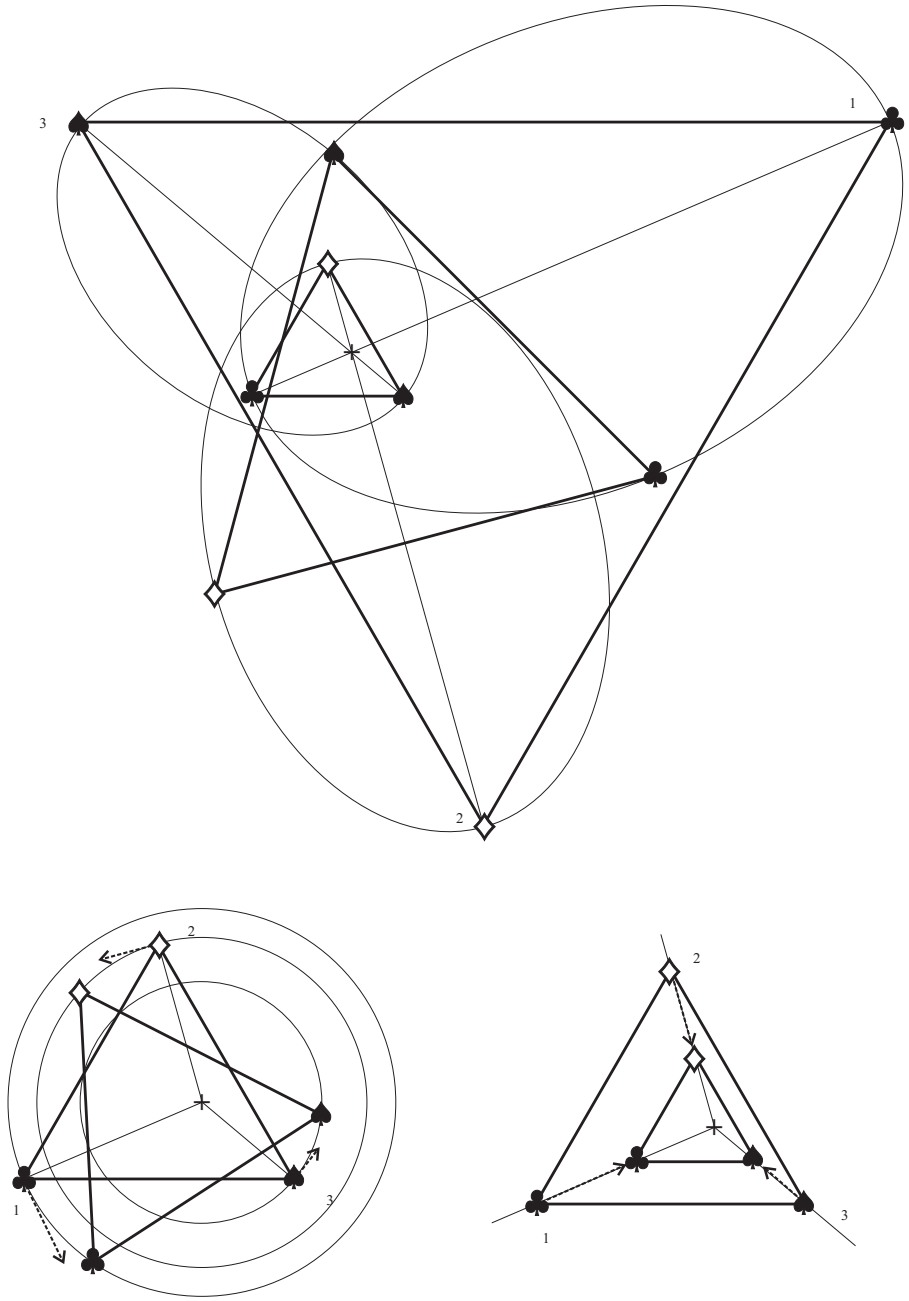
Warto zauważyć, że twierdzenie to częściowo stosuje się do zagadnienia N ciał. Punkty 2, 3 i 5 definiują tak zwane **konfiguracje centralne**, czyli rozwiązania, w których N ciał porusza się po orbitach keplerowskich i pozostaje w wierzchołkach bryły foremnej lub kilku koncentrycznych brył foremnych.

Wróćmy jednak do zagadnienia trzech ciał. W świetle całki momentu pędu, punkt 1 oznacza także, że płaszczyzna w której poruszają się ciała ma stałą orientację w przestrzeni. Pozwala to dobrać układ współrzędnych tak, aby dla wszystkich mas $z_i = \dot{z}_i = 0$. Wspomniany w punkcie 5 ruch po orbitach keplerowskich odbywa się tak, jakby w barycentrum znajdowała się fikcyjna masa m_i^* będąca funkcją mas m_1, m_2 i m_3. W ogólności mamy masy fikcyjne $m_1^* \neq m_2^* \neq m_3^*$ a konkretnie

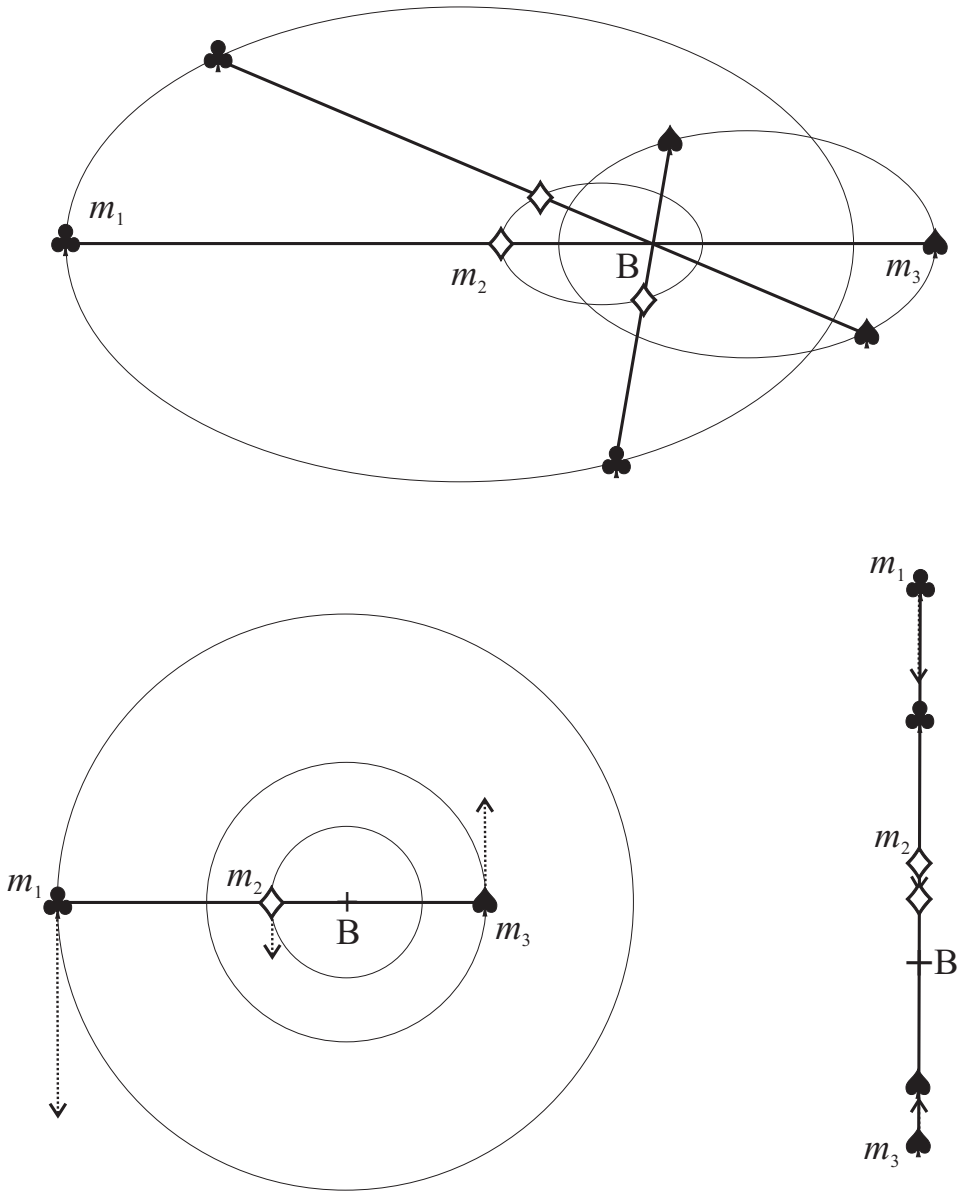
$$\begin{aligned} m_1^* &= \frac{(m_2^2 + m_2\, m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}, \\ m_2^* &= \frac{(m_1^2 + m_1\, m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}, \\ m_3^* &= \frac{(m_1^2 + m_1\, m_2 + m_2^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wzory te otrzymujemy z własności 2, 3 i 4.

Rysunki 2.1 i 2.2 prezentują różne przypadki rozwiązań homograficznych zagadnienia trzech ciał z przykładowymi masami $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 3$. Rysunek 2.1 przedstawia cztery przykładowe rozwiązania trójkątne z orbitami: eliptycznymi (góra), kołowymi (lewy dolny) i prostoliniowymi (prawy dolny). W przypadku ogólnym ruch odbywa się po orbitach eliptycznych, parabolicznych czy hiperbolicznych, przy czym trójkąt równoboczny $m_1 m_2 m_3$



Rysunek 2.1: Przykłady homograficznych rozwiązań trójkątnych Lagrange'a



Rysunek 2.2: Przykłady homograficznych rozwiązań kolinearnych Lagrange'a

obraca się wokół barycentrum B i zmienia się długość jego boków. Zauważmy, że trzy orbity mają różne półosie ale jednakowe mimośrody. Wszystkie masy jednocześnie przechodzą przez perycentra i apocentra swoich orbit, co jest konsekwencją faktu, iż ich anomalie prawdziwe są zawsze jednakowe $f_1 = f_2 = f_3$, to zaś wynika z warunku 3 o równych kątach między $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{v}_i$. Trzy orbity kołowe odpowiadają rozwiązaniu równowagi względnej – trójkąt ma stałą długość boków i jedynie obraca się wokół barycentrum. Z kolei orbity prostoliniowe odpowiadają rozwiązaniu jednokładnemu i trójkąt ma stałą orientację w przestrzeni. O tym czy nastąpi kolizja mas czy ucieczka w nieskończoność decydują prędkości mas ale tak czy inaczej rozwiązanie homotetyczne nie może być dynamicznie trwałe. Podobne uwagi dotyczą Rysunku 2.2, przedstawiającego różne rodzaje orbit związanych z rozwiązaniem kolinearnym typu m_1, m_2, m_3.

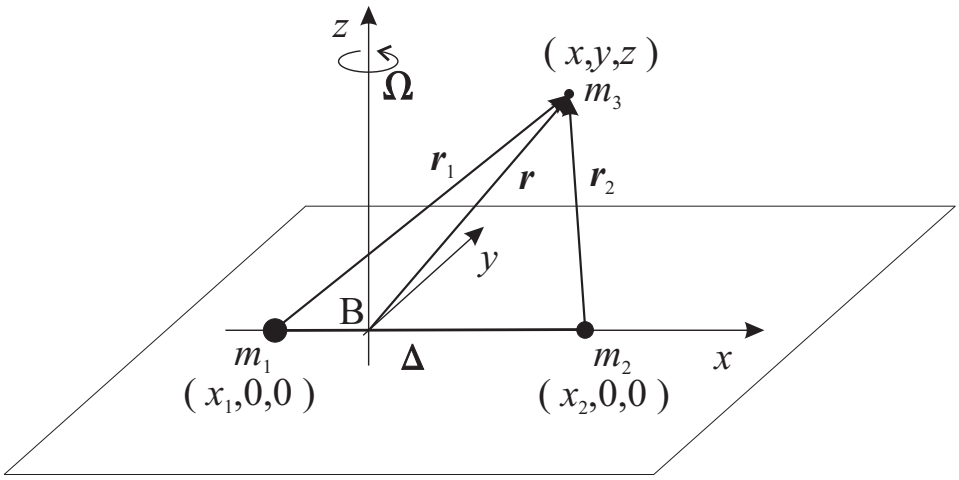
Początkowo uważano rozwiązania Lagrange'a za ciekawostkę matematyczną; tymczasem dzisiaj znamy już wiele przypadków występowania tego typu orbit w Układzie Słonecznym. Niemal wszystkie przypadki dotyczą jednak sytuacji gdy jedna z mas jest znacznie mniejsza od pozostałych dwóch. Z tego też względu omówimy je w rozdziale poświęconym ograniczonemu zagadnieniu trzech ciał.

2.2 Kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał

Wobec niecałkowalności zagadnienia trzech ciał warto rozpatrzyć skromniejszy przypadek, dość często spotykany w praktyce, gdy masa m_3 jest na tyle mniejsza od pozostałych, że praktycznie nie wpływa na ich ruch. Skoro zaniedbujemy masę m_3, to masy m_1 i m_2 poruszają się po orbitach keplerowskich względem ich barycentrum. Możemy więc uznać, że ruch masy m_3 jest zagadnieniem o „trzech i pół" stopniach swobody: badamy trzy składowe wektora położenia i trzy składowe prędkości (lub pędu) przy czym w równaniach ruchu pojawia się jawna zależność od czasu (tzw. pół stopnia swobody), gdyż położenia ciał m_1 i m_2 traktujemy jako znane funkcje czasu. Tak zdefiniowane zagadnienie nazywamy **ograniczonym zagadnieniem trzech ciał**. Wbrew nazwie jest to oczywiście zagadnienie ruchu jednego ciała w zadanym polu grawitacyjnym.

Ograniczone zagadnienie trzech ciał upraszcza się na kilka sposobów:

1. Można przyjąć, że ciało m_3 porusza się w płaszczyźnie orbitalnej mas m_1 i m_2. Powstaje wtedy zagadnienie o dwóch i pół stopniach swobody zwane **płaskim ograniczonym zagadnieniem trzech ciał**.



Rysunek 2.3: Układ współrzędnych i geometria ograniczonego zagadnienia trzech ciał.

2. Zakładając, że masy m_1 i m_2 poruszają się po orbitach kołowych otrzymujemy **kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał**. Przy odpowiednim doborze zmiennych może ono mieć tylko trzy stopnie swobody.

3. Oba uproszczenia można połączyć, co prowadzi do **płaskiego kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał** o dwóch stopniach swobody.

W dalszej części wykładu zajmiemy się bliżej kołowym ograniczonym zagadnieniem trzech ciał.

Wprowadźmy układ współrzędnych, którego środek znajduje się w barycentrum B mas m_1 i m_2 (por. rys. 2.3). Oś Bx przechodzi przez masy m_1 i m_2. Zakładamy, że

$$m_1 \geqslant m_2$$

a wtedy oś Bx skierowana jest od B do m_2 (niektórzy autorzy kierują oś odwrotnie). Oś Bz uzgadniamy z momentem pędu mas m_1 i m_2, zaś oś By dobieramy tak, aby powstał prawoskrętny układ kartezjański.

Z definicji środka masy znajdujemy współrzędne x_1 i x_2 jako funkcje mas i odległości Δ:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \qquad x_2 - x_1 = \Delta,$$

prowadzi do

$$x_1 = \frac{-m_2 \Delta}{m_1 + m_2}, \qquad x_2 = \frac{m_1 \Delta}{m_1 + m_2}.$$

Jeśli masy m_1 i m_2 poruszają sie po orbitach kołowych względem barycentrum, to znaczy, że znajdują się zawsze w stałej odległości wzajemnej Δ i układ współrzędnych obraca się jednostajnie wokół osi Bz z prędkością kątową

$$\Omega = k\sqrt{\frac{m_1+m_2}{\Delta^3}}, \tag{2.3}$$

wynikającą z III prawa Keplera. W obracającym się jednostajnie układzie współrzędnych obie masy spoczywają a więc wytwarzane przez nie pole grawitacyjne przestaje zależeć jawnie od czasu. Przekonamy się o tym wypisując funkcję Hamiltona naszego zagadnienia.

WYKŁAD 6

2.2.1 Całka Jacobiego

Rozpatrujemy ruch cząstki o zaniedbywalnej masie w potencjale

$$V = -\frac{k^2 m_1}{r_1} - \frac{k^2 m_2}{r_2}.$$

Jest to energia potencjalna na jednostkę masy. Jak wiemy z *Matematycznych podstaw mechaniki nieba* (*MPMN*, rozdz. 3.2.3), funkcja Hamiltona w układzie obracających się osi z wyżej wypisanym potencjałem ma postać

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(X^2+Y^2+Z^2\right) + \Omega\,(y\,X - x\,Y) - \frac{k^2 m_1}{r_1} - \frac{k^2 m_2}{r_2}. \tag{2.4}$$

Zauważmy, że odległości masy m_3 od obu pozostałych mas

$$r_1 = ||\boldsymbol{r} - (x_1,0,0)^{\mathrm{T}}|| = \sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2},$$
$$r_2 = ||\boldsymbol{r} - (x_2,0,0)^{\mathrm{T}}|| = \sqrt{(x-x_2)^2+y^2+z^2},$$

nie zależą jawnie od czasu, gdyż położenie obu mas jest stałe. W tej sytuacji, skoro

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0,$$

mamy całkę ruchu $\mathcal{H} = \text{const.}$ (*MPMN*, rozdz. 2.3) czyli, oznaczając $\mu_i = k^2\,m_i$,

$$\frac{1}{2}\left(X^2+Y^2+Z^2\right) + \Omega\,(y\,X - x\,Y) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} = -\tfrac{1}{2}\,C. \tag{2.5}$$

Stała ruchu C nazywana jest stałą Jacobiego, zaś równanie (2.5) można nazwać całką Jacobiego, choć właściwie nazwa ta jest stosowana do przekształconej postaci, którą podamy niżej.

W niektórych zastosowaniach wygodniej jest używać całki Jacobiego (2.5) w postaci jawnie zależnej od prędkości. Przypomnijmy, że w układzie obracającym się pędy $\boldsymbol{R}$ nie są tożsame z prędkościami $\dot{\boldsymbol{r}}$ i mamy

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = X + \Omega\, y, \\
\dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} = Y - \Omega\, x, \\
\dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z} = Z.
\end{aligned}$$

Z tej połowy równań Hamiltona możemy wyznaczyć pędy

$$\begin{aligned}
X &= \dot{x} - \Omega\, y, \\
Y &= \dot{y} + \Omega\, x, \\
Z &= \dot{z},
\end{aligned}$$

i podstawić je do całki (2.5). Elementarne przekształcenia prowadzą do całki Jacobiego w tradycyjnej postaci

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \Omega^2 \left(x^2 + y^2\right) - \frac{2\,\mu_1}{r_1} - \frac{2\,\mu_2}{r_2} + C = 0. \tag{2.6}$$

Całka Jacobiego jest jedyną całką ruchu w ograniczonym kołowym (tylko kołowym !) zagadnieniu trzech ciał. Oznacza to oczywiście niecałkowalność tego zagadnienia i to nawet w przypadku płaskim. Tym nie mniej, ilość informacji o ruchu jaką jesteśmy w stanie wydobyć z całki Jacobiego jest doprawdy imponująca, o czym przekonamy się w następnych podrozdziałach.

2.2.2 Kryterium Tisseranda

Gdy kometa okresowa obserwowana jest z Ziemi podczas kolejnego przejścia przez peryhelium swojej orbity, to zazwyczaj jej oskulacyjne elementy $a_{\rm n}$, $e_{\rm n}$ oraz $I_{\rm n}$ nie odbiegają znacznie od tych, jakie obserwowane były przy okazji poprzedniego przejścia: $a_{\rm o}$, $e_{\rm o}$, $I_{\rm o}$. Wyjątkiem od tej reguły jest sytuacja, gdy nastąpiło ciasne zbliżenie komety do jednej z planet olbrzymów – najczęściej Jowisza; może wtedy nastąpić tak znaczna zmiana elementów, że można by uznać obserwowaną po powrocie w pobliże Słońca kometę za nowe, nieznane wcześniej ciało niebieskie. Kryterium Tisseranda pozwala na uniknięcie takiej pomyłki. Jego ideę można streścić następująco:

1. Uznajemy, że ruch komety odbywa się w ramach kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał Słońce(m_1)-Jowisz(m_2)-kometa.

2. Zakładamy, że wartość stałej Jacobiego C komety nie ulega zmianie w momencie kolejnych jej pojawień, co pozwala na identyfikację komet nawet gdy elementy jej orbity uległy istotnej zmianie.

Aby ułatwić korzystanie z tego kryterium, Tisserand wprowadził dość istotne uproszczenia do wyżej wymienionej procedury.

Rozpatrzmy całkę Jacobiego (2.5). Jak wiemy (*MPMN*, rozdz. 3.2.3), kwadrat pędu $\boldsymbol{R}^2$ w obracającym się układzie współrzędnych, to nic innego jak kwadrat prędkości $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^2$ mierzonej w inercjalnym układzie współrzędnych. A zatem równość (2.5) przyjmuje postać

$$\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^2 - \Omega\,(x\,Y - y\,X) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} = -\tfrac{1}{2}\,C.$$

Uznajmy teraz dla uproszczenia, że w momencie obserwacji kometa jest na tyle oddalona od Jowisza, że w całce Jacobiego można zaniedbać wyraz $-\frac{\mu_2}{r_2}$, co wynika zarówno z małej masy Jowisza m_2 w porównaniu z masą Słońca m_1 jak i z różnicy odległości komety od Jowisza r_2 i od Słońca r_1, co oznacza w efekcie $\frac{\mu_1}{r_1} \gg \frac{\mu_2}{r_2}$. Mamy więc w przybliżeniu

$$\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^2 - \Omega\,(x\,Y - y\,X) - \frac{\mu_1}{r_1} \approx -\tfrac{1}{2}\,C. \tag{2.7}$$

Następnie zauważmy, że prędkość kątowa obrotu układu współrzędnych to nic innego jak ruch średni Jowisza wynikający z III prawa Keplera

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu_1}{a_{\mathrm{J}}^3}},$$

gdzie a_{J} to promień orbity Jowisza i zaniedbując masę Jowisza możemy wstawić w miejsce formalnego $k^2(m_1+m_2)$ uproszczone $\mu_1 = k^2\,m_1$. Mamy więc

$$\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^2 - \sqrt{\frac{\mu_1}{a_{\mathrm{J}}^3}}\,(x\,Y - y\,X) - \frac{\mu_1}{r_1} \approx -\tfrac{1}{2}\,C.$$

Przypomnijmy teraz, że wyrażenie $x\,Y - y\,X$ to składowa G_z momentu pędu komety, czyli zmienna Delaunaya H. W świetle definicji zmiennych Delaunaya (*MPMN* rozdz. 3.3.4) mamy

$$H = \sqrt{\mu_1\,a\,(1-e^2)}\,\cos I,$$

natomiast całka sił żywych w zagadnieniu dwóch ciał prowadzi nas do związku

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^2 - \frac{\mu_1}{r_1} = -\frac{\mu_1}{2\,a}.$$

W ten sposób uzależniliśmy całkę Jacobiego (2.7) od elementów oskulacyjnych komety

$$-\frac{\mu_1}{2\,a} - \sqrt{\frac{\mu_1}{a_{\mathrm{J}}^3}}\,\sqrt{\mu_1\,a\,(1-e^2)}\,\cos I \approx -\tfrac{1}{2}\,C,$$

a po podzieleniu obu stron przez $-\frac{\mu_1}{2\,a_{\mathrm{J}}}$ otrzymujemy

$$\frac{a_{\mathrm{J}}}{a} + 2\,\sqrt{\frac{a}{a_{\mathrm{J}}}}\,\sqrt{1-e^2}\,\cos I \approx \frac{C a_{\mathrm{J}}}{\mu_1}. \tag{2.8}$$

A zatem, nawet jeśli każdy z elementów orbity komety uległ poważnej zmianie, to w ramach błędu wynikającego z przyjętych uproszczeń powinien być spełniony związek

$$\frac{a_{\mathrm{J}}}{a_{\mathrm{n}}} + 2\,\sqrt{\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{J}}}}\,\sqrt{1-e_{\mathrm{n}}^2}\,\cos I_{\mathrm{n}} \approx \frac{a_{\mathrm{J}}}{a_{\mathrm{o}}} + 2\,\sqrt{\frac{a_{\mathrm{o}}}{a_{\mathrm{J}}}}\,\sqrt{1-e_{\mathrm{o}}^2}\,\cos I_{\mathrm{o}}, \tag{2.9}$$

zwany kryterium Tisseranda.

2.2.3 Zmienne bezwymiarowe

Istnieją dwa powody, dla których wprowadza się w zagadnieniach dynamiki tak zwane zmienne bezwymiarowe (spotkać można także termin „jednostki bezwymiarowe", który jednak ma charakter oksymoronu). Pierwszy ma charakter praktyczny: wygodniej jest używać liczb rzędu jedności niż niż liczb bardzo wielkich lub małych (przykład – stosowanie jednostek SI w analizie ruchu planet). Drugi powód jest bardziej zasadniczy: dobierając jednostki masy, odległości i czasu tak, aby jak najwięcej stałych fizycznych lub charakterystycznych wielkości miało wartość 1, ujawniamy od ilu parametrów dowolnych faktycznie zależy nasz problem. Należy jednak pamiętać, że ceną za używanie zmiennych bezwymiarowych jest rezygnacja z dobrego narzędzia kontroli przekształceń wzorów, jakim jest sprawdzanie jednostek obu stron równania przed i po przekształceniu.

Jak wprowadzamy zmienne bezwymiarowe w ograniczonym zagadnieniu trzech ciał ? Przypomnijmy, że oprócz sześciu warunków początkowych, zagadnienie to zależy od pięciu parametrów fizycznych: k, m_1, m_2, Ω i Δ. Jeden

z nich, niech to będzie Ω, jest zależny od pozostałych zgodnie z (2.3), co pozostawia cztery niezależne parametry k, m_1, m_2 i Δ. Mogłoby się zdawać, że skoro mamy wpływ na jednostki odległości, czasu i masy, to jesteśmy w stanie wyeliminować trzy parametry. Ale nie zapominajmy, że hamiltonian (2.4) jest już funkcją podzieloną przez masę m_3, tak samo jak i pęd (por. *MPMN* rozdz. 2.5.3). Wybór jednostki masy jest w tej sytuacji bez znaczenia, gdyż nie ma wpływu na wartość pędu (ani – tym bardziej – położenia).

- Niech jednostką odległości będzie odległość między masami m_1 i m_2. Przy takim wyborze będziemy mieli $\Delta = 1$.
- Przyjmiemy „kanoniczną" jednostkę czasu, dla której parametr grawitacyjny z podaną wyżej jednostką odległości $k^2\,(m_1 + m_2) = 1$.

Zauważmy, że przy takim wyborze jednostek prędkość kątowa, z jaką obraca się układ współrzędnych, jest również jednostkowa, gdyż zgodnie z (2.3) mamy

$$\Omega = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_2)}{\Delta^3}} = 1.$$

Jakkolwiek funkcja hamiltona pozornie zależy nadal od dwóch mas, to jest to zależność w sposób dość szczególny:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) + y\,X - x\,Y - \frac{m_1}{(m_1 + m_2)\,r_1} - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)\,r_2},$$

gdzie do (2.4) podstawiliśmy $\Omega = 1$ oraz $k^2 = 1/(m_1 + m_2)$. Jak widać, wystarczy teraz wprowadzić jeden bezwymiarowy parametr μ, dla którego

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad 1 - \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \tag{2.10}$$

aby w pełni uwzględnić wpływ dwóch mas m_1 i m_2. Zauważmy, że skoro przyjęliśmy $m_1 \geqslant m_2$, to

$$0 < \mu \leqslant \frac{1}{2}.$$

Funkcja Hamiltona w zmiennych bezwymiarowych i z dodatkową redukcją jednego parametru przyjmuje postać

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) + y\,X - x\,Y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \tag{2.11}$$

gdzie

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}, \tag{2.12}$$

ponieważ masa m_1 ma teraz współrzędną $x_1 = -\mu$, zaś masa m_2 ma $x_2 = 1-\mu$. A zatem, oprócz warunków początkowych, kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał zależy efektywnie od jednego tylko parametru – stosunku mas μ.

2.2.4 Powierzchnie i krzywe zerowej prędkości

Całka Jacobiego jest jedyną całką ruchu w naszym zagadnieniu i nie wystarcza ona do znalezienia kształtu trajektorii, ale można ją wykorzystać do określenia dopuszczalnych obszarów w jakich może odbywać się ruch cząstki z zadaną wartością stałej Jacobiego C. Zauważmy, że kwadrat prędkości $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ w obracającym się układzie współrzędnych nigdy nie może być liczbą ujemną. A zatem, jeśli wstawimy $v^2 = 0$ w całce Jacobiego (2.6), otrzymamy równanie granicznej powierzchni oddzielającej dopuszczalne obszary ruchu od fizycznie niemożliwych

$$\Omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{2\,\mu_1}{r_1} + \frac{2\,\mu_2}{r_2} = C.$$

Używając zmiennych bezwymiarowych i parametru masowego μ, możemy sprowadzić to równanie do

$$x^2 + y^2 + \frac{2\,(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\,\mu}{r_2} = C, \tag{2.13}$$

Zależy ono już tylko od dwóch parametrów: stałej Jacobiego C i stosunku mas μ. Stała Jacobiego zawiera „skomprymowaną" informację o warunkach początkowych. Dokładniej – reprezentuje ona zbiór wszystkich możliwych szóstek liczb (położeń i prędkości), które przy danej wartości μ związane są z określoną wartością $C = -2\mathcal{H}$, gdzie hamiltonian dany jest równaniem (2.11).

Koncepcja zdefiniowania obszarów dostępnych dla ruchu poprzez warunek $v^2 \geqslant 0$ pochodzi od George'a Williama Hilla[1]. Można ją zastosować w dowolnym zagadnieniu, gdzie badamy ruch jednego ciała w zadanym polu z potencjałem. Na przykład, w zagadnieniu względnym dwóch ciał obowiązuje całka siły żywej

$$\frac{v^2}{2} - \frac{k^2(m_1+m_2)}{r} = h.$$

Dla orbit eliptycznych stała h jest powiązana z półosią wielką a wzorem

$$h = -\frac{k^2(m_1+m_2)}{2a} < 0.$$

[1] G. W. Hill, 1878: Researches in the Lunar Theory, *The American Journal of Mathematics* **1**, 1, s. 5–26. W tym samym artykule Hill jako pierwszy wprowadził nazwę *całka Jacobiego* oraz zdefiniował i zbadał zagadnienie przedstawione w dodatku A.

Warunek $v^2 \geqslant 0$ prowadzi do

$$\frac{k^2(m_1+m_2)}{r} - \frac{k^2(m_1+m_2)}{2a} \geqslant 0,$$

czyli ruch musi odbywać się w odległości $r \leqslant 2a$ i powierzchnią zerowej prędkości jest sfera o promieniu $r = 2a$.

Powierzchnie Hilla (Roche'a)

Rodzina powierzchni zerowej przędkości w przestrzeni zwana jest powierzchniami Hilla. W astrofizyce powszechna jest nazwa powierzchni Roche'a, ale są one synonimami tylko wtedy, gdy potencjał grawitacyjny gwiazdy przybliżamy potencjałem punktu materialnego). Przeanalizujemy zmiany ich kształtu w zależności od stałej Jacobiego C.

Zacznijmy od sprawdzenia, co się dzieje, gdy stała Jacobiego $C \gg 1$. Jest to możliwe w trzech przypadkach:

1. Cząstka znajduje się bardzo daleko od środka układu ($x^2+y^2 \gg 1$) i wtedy $\frac{2\,(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\,\mu}{r_2} \ll 1$. Równanie (2.13) przechodzi w

$$x^2 + y^2 \approx C, \tag{2.14}$$

   a więc jest równaniem walca o osi symetrii Oz i promieniu $\sqrt{C}$, zwanego **walcem asymptotycznym**. Ruch może się odbywać tylko na zewnątrz tego walca, gdyż porównując z (2.6), dla $v^2 > 0$ mielibyśmy $x^2+y^2 \approx C+v^2$ i przy tej samej wartości stałej C odległość od osi Oz układu musi być większa.

2. Cząstka jest bardzo blisko masy m_1, tzn. $r_1 \ll 1$. Dominującym wyrazem w równaniu (2.13) jest wtedy $\frac{2\,(1-\mu)}{r_1} \gg 1$ i w przybliżeniu obowiązuje

$$\frac{2\,(1-\mu)}{r_1} \approx C, \tag{2.15}$$

   czyli równanie sfery o promieniu $2\,(1-\mu)\,C^{-1}$, opisanej wokół masy m_1. Ruch możliwy jest tylko wewnątrz sfery, gdyż dla $v^2 > 0$ mamy $r_1 = 2\,(1-\mu)\,(C+v^2)^{-1}$.

3. Cząstka jest bardzo blisko masy m_2, czyli $r_2 \ll 1$. Dominującym wyrazem w równaniu (2.13) jest $\frac{2\,\mu}{r_2} \gg 1$ i mamy przybliżone równanie powierzchni

$$\frac{2\,\mu}{r_2} \approx C. \tag{2.16}$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku jest to równanie sfery o promieniu $2\,\mu\,C^{-1}$, opisanej wokół masy m_2. Tu także ruch możliwy jest tylko wewnątrz sfery.

Trzy wymienione wyżej powierzchnie oznaczymy odpowiednio W, S_1 i S_2. Są one przedstawione na rys. 2.4.

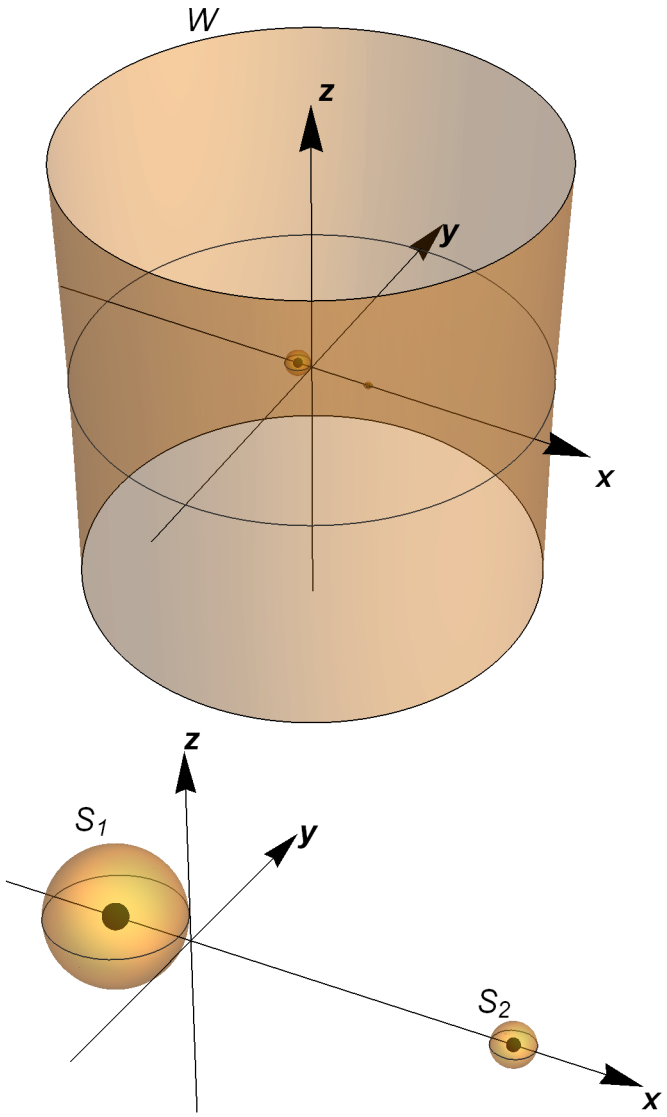
Co będzie się działo przy zmniejszaniu wartości stałej C ? Promień walca W zmniejsza się i to tym szybciej, im bliżej jesteśmy płaszczyzny Oxy. W przestaje więc być walcem. Dodatkowo pojawiają się „wgniecenia" w pobliżu przecięcia z osią Ox. Powierzchnie S_1 i S_2 powiększają swój promień i zatracają charakter sferyczny. S_1 wydłuża się w stronę masy m_2 a S_2 w stronę masy m_1. Gdy wartość stałej Jacobiego spadnie do krytycznej wartości C_1, powierzchnie S_1 i S_2 stykają się w **punkcie Lagrange'a** L_1, położonym na osi Ox. Dla $C < C_1$ powierzchnie te zlewają się w jedną powierzchnię S_{12} wewnątrz której możliwy jest ruch. Tak więc, tylko dla $C \leqslant C_1$ możliwa jest sytuacja, w której cząstka, poruszając się początkowo wokół jednej z mas, może przejść na orbitę wokół drugiej masy.

W miarę jak zmniejszamy wartość stałej Jacobiego, dochodzimy do sytuacji, w której powierzchnie W i S_{12} uzyskują punkt wspólny. Dzieje się tak dla pewnej wartości stałej Jacobiego C_2, a punkt wspólny, leżący na osi Ox na prawo od masy m_2, nazywamy **punktem Lagrange'a** L_2. Gdy $C \leqslant C_2$, cząstka przestaje być uwięziona w otoczeniu mas m_1 i m_2 i może opuścić układ przez „korytarz" $x > 0$. Możliwe także jest wejście cząstki nadlatującej z dużej odległości w pobliże mas m_1 i m_2. Od tego momentu mamy do czynienia z jedną powierzchnią WS_{12} o kształcie przypominającym zdeformowny walec wgnieciony od strony dodatnich wartości zmiennej x.

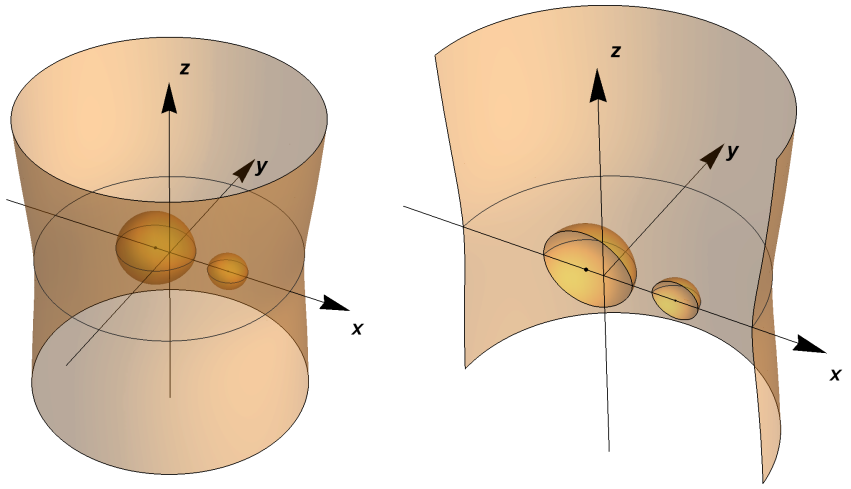
Istnieje kolejna wartość krytyczna $C_3 \leqslant C_2$, dla której pojawia się trzeci punkt Lagrange'a L_3. Jest to punkt styku powierzchniWS_{12} z samą sobą; wgniecenie wzdłuż osi Ox staje się na tyle głębokie, że dotyka powierzchni zdeformowanego walca po stronie $x < 0$ osi Ox. Dla wartości $C \leqslant C_3$ możliwa jest już ucieczka z układu (lub wejście w jego otoczenie) od strony $x < 0$.

Dalsze zmniejszanie C powiększa „tunel" wzdłuż osi Ox. Rozrasta on się do tego stopnia, że następuje rozerwanie powierzhcni WS_{12} na dwie części: powierzchnię górną W_+ i powierzchnię dolną W_-. Rozerwanie to następuje w dwóch, symetrycznie rozmieszczonych punktach Lagrange'a L_4 i L_5, umieszczonych w wierzchołkach trójkąta równobocznego o podstawie m_1, m_2 i boku $\Delta = 1$. Krytyczną wartość stałej Jacobiego dla tych punktów oznaczymy C_{45}.

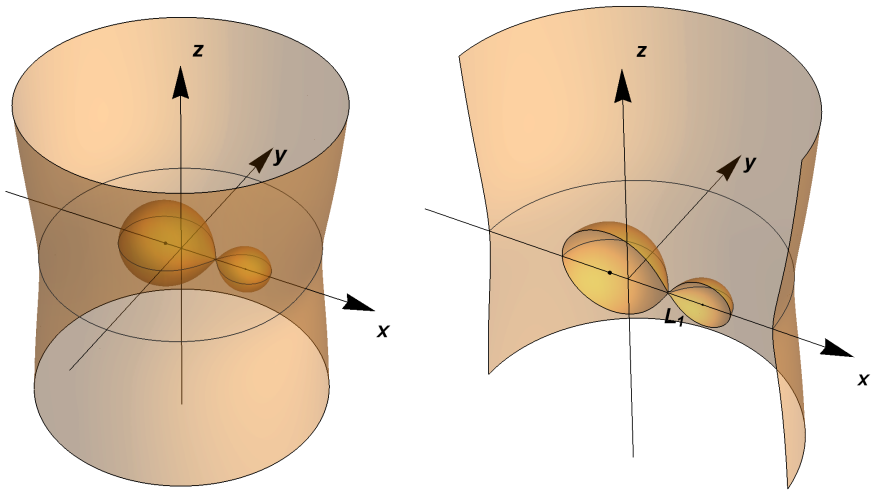
Jeśli mamy do czynienia z granicznym przypadkiem równych mas $m_1 = m_2$, czyli $\mu = \frac{1}{2}$, powierzchnie zerowej prędkości są symetryczne względem płaszczyzny Oyz. Mamy wtedy $C_2 = C_3$, punkt L_1 wypada w środku układu,



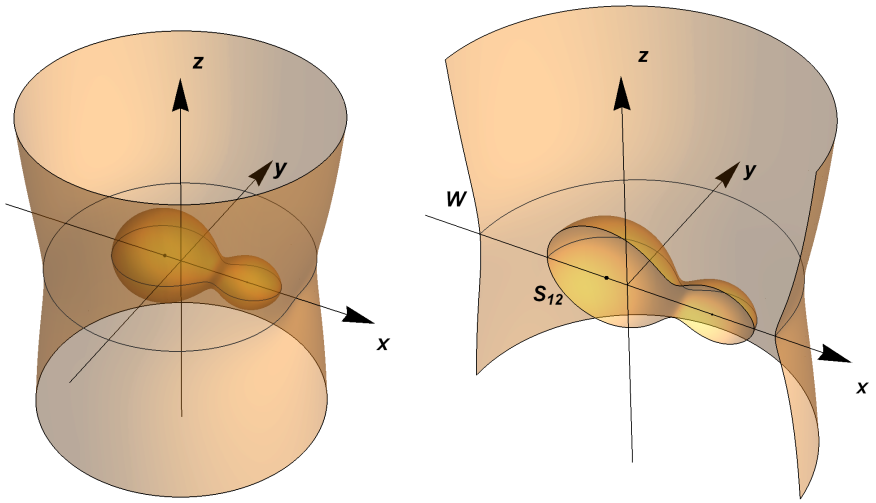
Rysunek 2.4: Powierzchnie Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = 10$. Ruch możliwy jest tylko na zewnątrz walca asymptotycznego W lub wewnątrz sfer S_1 i S_2. U dołu powiększenie wnętrza walca asymptotycznego.



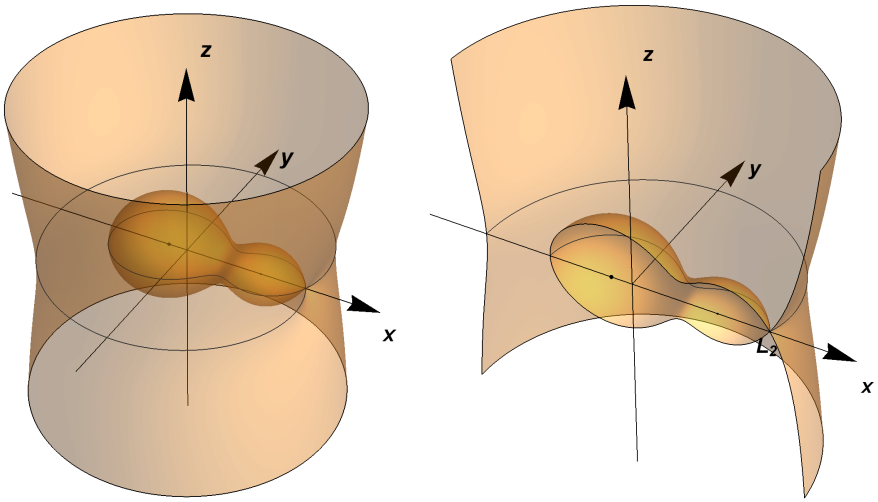
Rysunek 2.5: Powierzchnie Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = 4$. Po prawej przekrój w płaszczyźnie $y = 0$.



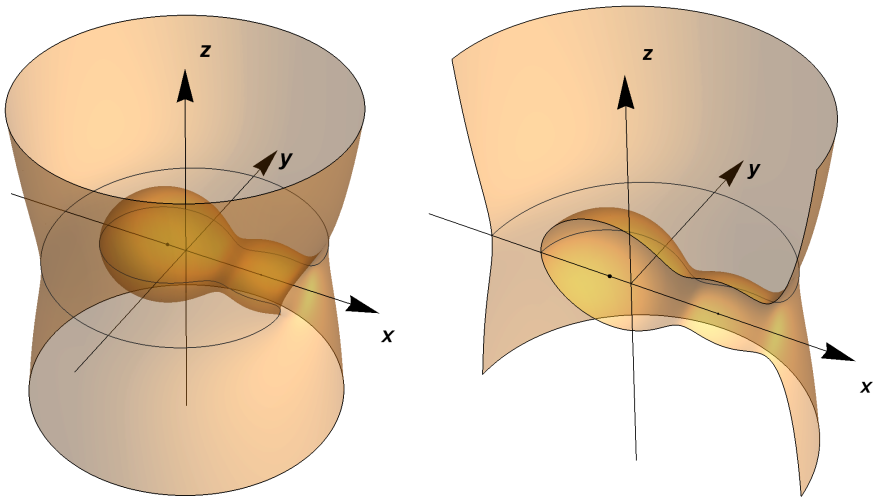
Rysunek 2.6: Powierzchnie Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = C_1 \approx 3.80465$. Powierzchnie wewnętrzne stykają się punkcie Lagrange'a L_1.



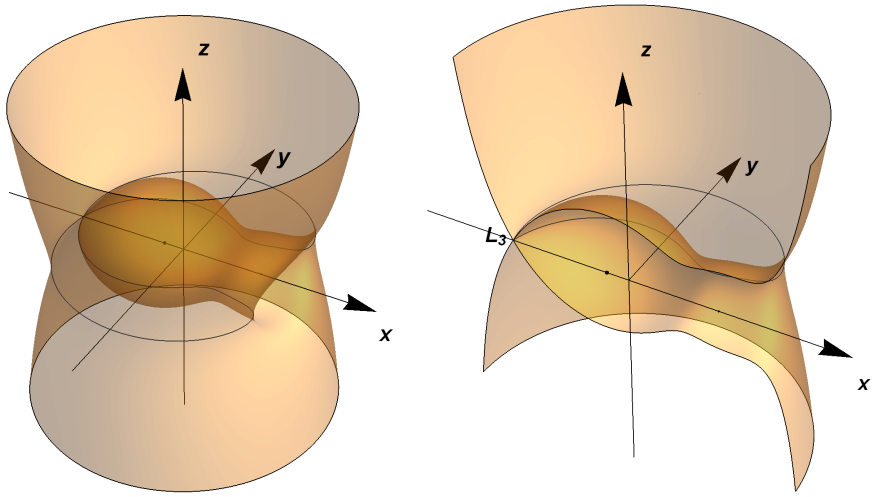
Rysunek 2.7: Powierzchnie Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = 3.6$.



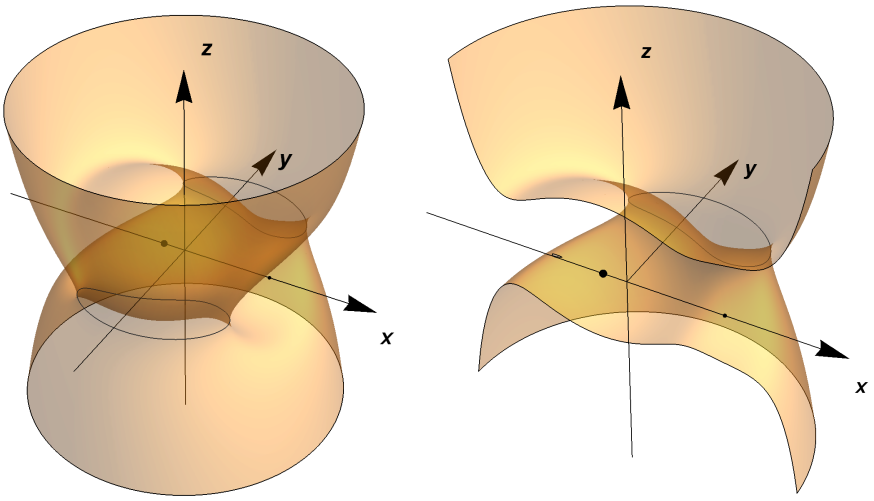
Rysunek 2.8: Powierzchnie Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = C_2 \approx 3.5524$. Powierzchnia wewnętrzna i walec asymptotyczny stykają się punkcie Lagrange'a L_2.



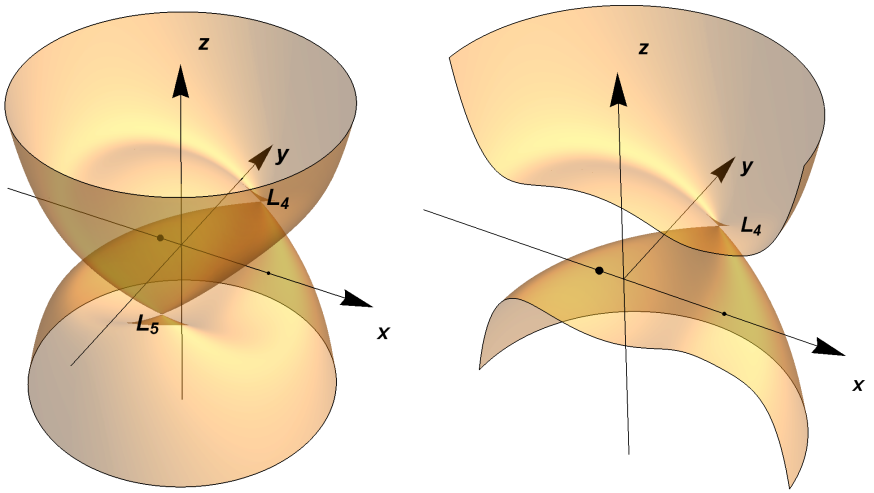
Rysunek 2.9: Powierzchnia Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = 3.4$.



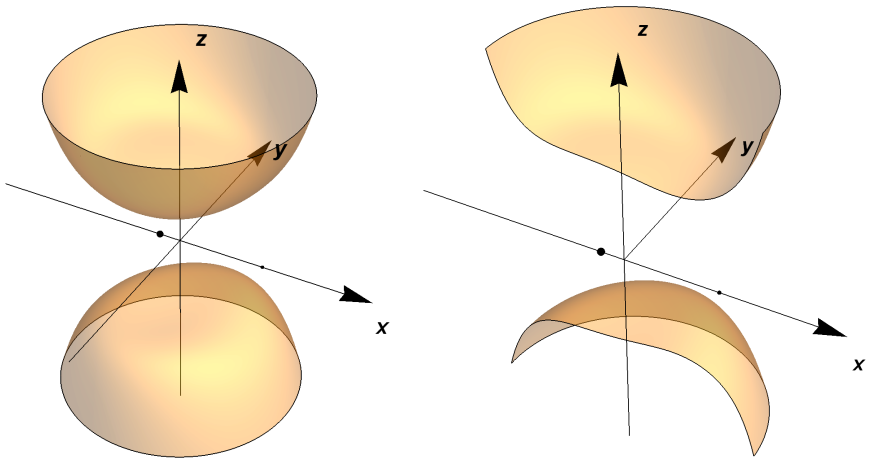
Rysunek 2.10: Powierzchnia Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = C_3 \approx 3.1973$. Powierzchnia styka się sama z sobą punkcie Lagrange'a L_3.



Rysunek 2.11: Powierzchnia Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = 3$.



Rysunek 2.12: Powierzchnia Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = C_{45} = 2.84$. W płaszczyźnie $z = 0$ powierzchnia Hilla redukuje się do punktów Lagrange'a L_4 i L_5.



Rysunek 2.13: Powierzchnie Hilla dla $\mu = 0.2$ i $C = 2.3$.

punkty L_2 i L_3 są rozmieszczone symetrycznie na osi Ox, zaś punkty L_4 i L_5 leżą na osi Oy.

Krzywe Hilla w zagadnieniu płaskim

Krzywe Hilla to odpowiednik powierzchni Hilla (Roche'a) w zagadnieniu płaskim $z = \dot{z} = 0$. Ich kształt możemy wywnioskować, przecinając powierzchnie Hilla płaszczyzną $z = 0$. Odpowiednikiem walca asymptotycznego W staje się okrąg asymtotyczny; także sfery asymptotyczne S_1 i S_2 przyjmują postać okręgów. Wszystkie punkty Lagrange'a pojawiają się na płaszczyźnie $z = 0$ przy tych samych wartościach stałej Jacobiego $C_1 > C_2 \geqslant C_3 > C_{45}$. Zauważmy, że C_{45} staje się najmniejszą wartością stałej Jacobiego dla której istnieją krzywe Hilla, ponieważ dla $C < C_{45}$ powierzchnie mają $z \neq 0$.

Inne konwencje oznaczeń

W literaturze można spotkać inne konwencje oznaczeń niż przedstawiona wyżej. I tak:

- masy mogą być rozmieszczone odwrotnie, to znaczy większa m_1 po dodatniej stronie osi Ox, a mniejsza m_2 po ujemnej,
- punkty Lagrange'a mogą być numerowane od lewej do prawej, to znaczy L_1, L_2, L_3 zamiast L_3, L_1, L_2,

- czasami do stałej Jacobiego C dodaje się wyraz zależny od mas, tak aby jej wartość w punktach Lagrange'a L_4 i L_5 wynosiła zawsze $C' = 3$. Oznacza to $C' = C + \mu(1-\mu)/2$.

Kilka zastosowań praktycznych powierzchni zerowej prędkości

Rozpatrzmy kilka przykładowych sytuacji, w których znajduje zastosowanie analiza powierzchni zerowej prędkości kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał.

Astrodynamika: loty do Księżyca.
Zagadnienie lotu statku kosmicznego z orbity okołoziemskiej na Księżyc można dość dobrze przybliżyć w ramach ograniczonego zagadnieniem trzech ciał Ziemia(m_1)-Księżyc(m_2)-statek. Załóżmy, że statek znajduje się w odległości r_1 od Ziemi i r_2 od Księżyca. Jaką prędkość trzeba mu nadać, aby mógł on dolecieć do Księżyca ? Z punktu widzenia całki Jacobiego prędkość statku musi być co najmniej taka, aby stała Jacobiego C była co najwyżej równa granicznej wielkości C_1 – tej, dla której powstaje punkt Lagrange'a L_1. Przypomnijmy, że im mniejsza prędkość w obracającym się układzie współrzędnych, tym większa stała Jacobiego.

Z drugiej strony, statek nie ucieknie z układu Ziemia-Księżyc, jeśli jego prędkość jest mniejsza od granicznej wartości, odpowiadającej stałej Jacobiego C_2. A zatem, statek kosmiczny, który ma znaleźć się na orbicie wokół Księżyca, powinien mieć stałą Jacobiego $C_2 < C \leqslant C_1$.

Planetologia: stabilność układu planeta – księżyc.
Rozpatrzmy planetę posiadającą księżyc o zaniedbywalnej masie. Czy księżyc ten pozostanie trwale związany z planetą, czy też pewnego dnia ucieknie w przestrzeń międzyplanetarną wyrwany przez wpływ Słońca ? Odpowiedź na to pytanie można uzyskać w ramach ograniczonego zagadnienia trzech ciał Słońce(m_1)-planeta(m_2)-księżyc. Warunkiem koniecznym stabilności staje się kryterium $C \geqslant C_1$. Przy mniejszych wartościach stałej Jacobiego księżyc może opuścić otoczenie planety przez okolice punktu L_1. Oczywiście, nawet ten warunek nie wyklucza innych zagrożeń stabilności, takich jak możliwość kolizji księżyca z planetą.

Co ciekawe, dla układu Słońce-Ziemia-Księżyc mamy stałą $C_1 \approx 3.0009$; tymczasem Księżyc ma wartość stałej Jacobiego $C \approx 3.0012$, tylko nieznacznie większą od C_1. Trzeba przyznać, że nasz satelita jest dość luźno związany z Ziemią ...

Takie uwięzienie satelity wewnątrz powierzchni zerowej prędkości ota-

czającej planetę nazywane jest stabilnością satelity w sensie Hilla (ang. *Hill stability*).

Astrofizyka: ciasne układy podwójne gwiazd.
Powierzchnie zerowej prędkości okazują się również dobrym przybliżeniem kształtu gwiazd podwójnych w układach ciasnych, to znaczy takich, gdzie odległość składników jest tego samego rzędu wielkości co rozmiary większej z dwóch gwiazd. Ograniczone zagadnienie trzech ciał obejmuje wtedy następujące trzy „ciała": środek masy jednej z gwiazd jako masa m_1, środek masy drugiej gwiazdy jako masa m_2 i wreszcie mały element materii jednej z gwiazd przy jej powierzchni jako masa zaniedbywalna. Dość często spotyka się sytuację, kiedy z dwóch gwiazd układu jedna jest olbrzymem i zapełnia całkowicie powierzchnię zerowej prędkości zdefiniowaną przez stałą Jacobiego C_1. „Nadmiar materii" tej gwiazdy uchodzi wtedy przez punkt L_1 do otoczenia drugiego składnika układu.

2.2.5 Położenie punktów libracyjnych Lagrange'a

Analizując powierzchnie i krzywe zerowej prędkości obserwowaliśmy powstawanie punktów libracyjnych Lagrange'a bądź to jako miejsc styku powierzchni Hilla, bądź też jako miejsc, gdzie krzywe Hilla degenerują się do punktów. Obecnie znajdziemy położenie punktów Lagrange'a jako punktów krytycznych (położeń równowagi) układu równań ruchu.

Z funkcji Hamiltona w zmiennych bezwymiarowych (2.11) wyprowadzamy równania kanoniczne ruchu

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = X + y, \\
\dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} = Y - x, \\
\dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z} = Z, \\
\dot{X} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = Y - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-1+\mu), \\
\dot{Y} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -X - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) y, \\
\dot{Z} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) z.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Punkty krytyczne równań ruchu to takie wartości zmiennych, dla których wszystkie prawe strony równań stają się równe zero (czyli punkty, w których zamiera ruch układu). Poszukajmy takich punktów dla układu (2.17).

Warunki A. Trzecie i szóste z równań (2.17) posiadają punkty krytyczne gdy $z = Z = 0$. Oznacza to, że wszystkie punkty Lagrange'a muszą leżeć w płaszczyźnie orbity mas m_1 i m_2, gdyż taka jest definicja płaszczyzny Oxy.

Warunki B. Pierwsze dwa równania układu (2.17) wymagają przyjęcia

$$X = -y, \quad Y = x,$$

co w tłumaczeniu z języka pędów oznacza warunki zerowych prędkości $\dot{x}$ i $\dot{y}$ w układzie rotujących osi.

Warunki C. Po uwzględnieniu warunków **A** i **B** pozostają nam jeszcze dwa

nierozpatrywane warunki: $\dot{X} = 0$ i $\dot{Y} = 0$ czyli

$$x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-1+\mu) = 0, \tag{2.18}$$

$$y - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) y = 0. \tag{2.19}$$

Warunek (2.19) może być spełniony w dwóch przypadkach. Pierwszy z nich to dość oczywiste założenie $y = 0$. Nazwiemy ten przypadek **CK**, gdyż odpowiada on kolinearnym punktom Lagrange'a znajdującym się na osi Ox czyli na prostej przechodzącej przez masy m_1 i m_2. Oczywiście, samo przyjęcie $y = 0$ nie wystarcza, gdyż musimy jeszcze sprawić, aby został spełniony warunek (2.18). Prowadzi to do równania

$$x - (1-\mu)\frac{x+\mu}{((x+\mu)^2)^{3/2}} - \mu\frac{x-1+\mu}{((x-1+\mu)^2)^{3/2}} = 0. \tag{2.20}$$

Pamiętając, że $\sqrt{\xi^2} = |\xi|$, wystrzegamy się pochopnego uproszczenia mianowników i zapisujemy (2.20) jako

$$x - (1-\mu)\frac{x+\mu}{|x+\mu|^3} - \mu\frac{x-1+\mu}{|x-1+\mu|^3} = 0. \tag{2.21}$$

Aby rozwiązać równanie (2.21), musimy je rozpatrywać w trzech rozłącznych przedziałach:

	przedział **I**	przedział **II**	przedział **III**
$\lvert x+\mu\rvert =$	$x+\mu$	$x+\mu$	$-(x+\mu)$
$\lvert x-1+\mu\rvert =$	$-(x-1+\mu)$	$x-1+\mu$	$-(x-1+\mu)$

Warunek CK-I. Przedział I oznacza położenie pomiędzy masami m_1 i m_2. Warunek (2.21) przybiera wtedy postać

$$x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $(x+\mu)^2(x-1+\mu)^2$ dochodzimy do wniosku, że punkt Lagrange'a L_1 znajduje się na osi Ox i ma współrzędną x będąca pierwiastkiem równania

$$x\,(x+\mu)^2(x-1+\mu)^2 - (1-\mu)\,(x-1+\mu)^2 + \mu\,(x+\mu)^2 = 0. \tag{2.22}$$

Jest to równanie piątego stopnia i twierdzenia algebry pozwalają jedynie na stwierdzenie, że w rozważanym przedziale posiada ono dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty; nie potrafimy natomiast rozwiązać tego równania w sposób ścisły poza granicznymi przypadkami: i) $\mu = \frac{1}{2}$, co prowadzi do $x_{\mathrm{L}_1} = 0$, oraz ii) $\mu \to 0$, z asymptotycznym $x_{\mathrm{L}_1} \to 1$. Pozostają nam więc w ogólności metody numeryczne poszukiwania pierwiastka lub rachunek zaburzeń. Dla dostatecznie małych wartości $\mu \ll \frac{1}{2}$, można przedstawić położenie punktu L_1 w postaci dość wolno zbieżnego szeregu

$$x_{\mathrm{L}_1} \simeq 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \ldots \tag{2.23}$$

Można udowodnić, że punkt ten leży zawsze bliżej masy m_2 (mniejszej) niż masy m_1.

Warunek CK-II. Przedział II to położenie na prawo od masy m_2. Warunek (2.21) przybiera wtedy postać

$$x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0.$$

Tak więc, aby znaleźć położenie punktu Lagrange'a L_2, musimy rozwiązać równanie piątego stopnia

$$x\,(x+\mu)^2(x-1+\mu)^2 - (1-\mu)\,(x-1+\mu)^2 - \mu\,(x+\mu)^2 = 0. \tag{2.24}$$

Podobnie jak poprzednio wiemy, że istnieje jeden pierwiastek rzeczywisty ale nie potrafimy go znaleźć w sposób dokładny. Nawet dla $\mu = \frac{1}{2}$ mamy tylko przybliżoną wartość $x_{\mathrm{L}_2} \approx 1.1984$ (ale x_{L_2} nie jest monotoniczną funkcją μ i osiąga maksimum w okolicach $\mu \approx 0.17$). Zauważmy także, że dla $\mu \to 0$ mamy, podobnie jak dla L_1, $x_{\mathrm{L}_2} \to 1$, tyle tylko, że teraz zbliżamy się do masy m_2 od drugiej strony.

Dla dostatecznie małych wartości $\mu \ll \frac{1}{2}$, można przedstawić położenie punktu L_2 w postaci szeregu zbliżonego do (2.23)

$$x_{\mathrm{L}_2} \simeq 1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \ldots \tag{2.25}$$

Podobieństwo szeregów i zbliżone zachowanie dla $\mu \to 0$ sugerują pewne matematyczne pokrewieństwo punktów L_1 i L_2.

Warunek CK-III. Przedział III oznacza położenie na lewo od masy m_1

a zatem będziemy się zajmować punktem L_3. Warunek (2.21) ma w tym przedziale postać

$$x + \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0.$$

A zatem x_{L_3} to wartość x będąca pierwiastkiem równania

$$x\,(x+\mu)^2(x-1+\mu)^2 + (1-\mu)\,(x-1+\mu)^2 + \mu\,(x+\mu)^2 = 0. \qquad (2.26)$$

I tym razem brak rozwiązania dokładnego – nawet dla $\mu = \frac{1}{2}$, gdy $x_{\mathrm{L}_3} = -x_{\mathrm{L}_2} \approx -1.1984$. Szereg dla x_{L_3} różni się istotnie od poprzednich (2.23) i (2.25), posiadając o wiele lepszą zbieżność

$$x_{\mathrm{L}_3} \simeq -1 - \tfrac{5}{12}\,\mu + \tfrac{1127}{20736}\,\mu^3 + \ldots \qquad (2.27)$$

W ten sposób, wychodząc od warunków **CK**, znaleźliśmy trzy kolinearne punkty Lagrange'a jako trzy rozwiązania (2.18) dla $y = 0$. Istnieje jednak i druga możliwość spełnienia (2.19) oprócz $y = 0$; nastąpi tak, gdy

$$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0,$$

co jest możliwe dla

$$r_1 = r_2 = 1.$$

W ten sposób otrzymujemy **warunki CT**. Upewnijmy się jednak jeszcze, czy na pewno warunki **CT**, spełniające (2.19), czynią zadość również i (2.18). Podstawiając do (2.18) związek $r_1 = r_2 = 1$ dostajemy

$$\begin{aligned} & x - \frac{1-\mu}{1}\,(x+\mu) - \frac{\mu}{1}\,(x-1+\mu) = \\ = \quad & x - (x + \mu - x\mu - \mu^2) - (\mu\,x - \mu + \mu^2) = 0 \end{aligned}$$

Jak widać, warunki **CT** prowadzą istotnie do kolejnych punktów krytycznych równań ruchu zagadnienia. Warunek $r_1 = r_2 = 1$ definiuje dwa punkty: jeden może być umieszczony w wierzchołku trójkąta równobocznego $m_1\,m_3\,m_2$ o współrzędnej $y > 0$ (punkt L_4) a drugi w wierzchołku trójkąta równobocznego $m_1\,m_2\,m_3$ o współrzędnej $y < 0$ (punkt L_5). Czysto geometryczne rozważania prowadzą nas do wniosku, że

$$\begin{cases} x_{\mathrm{L}_4} = \frac{1}{2} - \mu, & y_{\mathrm{L}_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x_{\mathrm{L}_5} = \frac{1}{2} - \mu, & y_{\mathrm{L}_5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \qquad (2.28)$$

Podsumowaniem tego rozdziału niech będzie tabelka zawierająca dane pięciu punktów krytycznych równań ruchu kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał. Dla ułatwienia powrotu z jednostek „bezwymiarowych" do tradycyjnych jednostek astronomicznych przywrócimy w niej czynniki, które uznaliśmy za równe jeden w dotychczasowych rozważaniach.

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
x/Δ	(2.22)	(2.24)	(2.26)	$(1-2\,\mu)/2$	$(1-2\,\mu)/2$
y	0	0	0	$\sqrt{3}\,\Delta/2$	$-\sqrt{3}\,\Delta/2$
z	0	0	0	0	0
X	0	0	0	$-\sqrt{3}\,\Omega\,\Delta/2$	$\sqrt{3}\,\Omega\,\Delta/2$
Y	$\Omega\,x_{L_1}$	$\Omega\,x_{L_2}$	$\Omega\,x_{L_3}$	$\Omega\,\Delta\,(1-2\,\mu)/2$	$\Omega\,\Delta\,(1-2\,\mu)/2$
Z	0	0	0	0	0

2.2.6 Stabilność punktów libracyjnych Lagrange'a

Wiadomości ogólne

Po ustaleniu położenia punktów Lagrange'a przejdźmy do zbadania ich stabilności. Istnieje wiele różnych sposobów definiowania pojęcia stabilności. Wyrażając się w sposób niezbyt ścisły można powiedzieć, że punkt krytyczny układu równań ruchu nazywamy stabilnym, gdy przyjąwszy warunki początkowe nieznacznie odbiegające od tego punktu otrzymamy orbitę, która zawsze pozostawać będzie w jego małym otoczeniu. W obecnym rozdziale ograniczymy się do tzw. stabilności liniowej punktów krytycznych (i to tylko w przypadku kanonicznym).

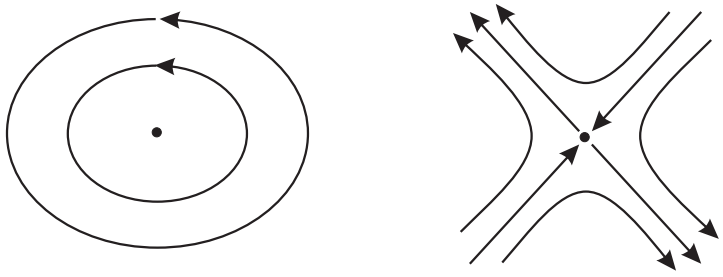
W układach posiadających funkcję Hamiltona mamy do czynienia z dwiema typowymi sytuacjami, przedstawionymi na rysunku: albo punkt krytyczny jest stabilny typu eliptycznego albo niestabilny typu hiperbolicznego. Przedstawiony niżej rysunek jest tylko poglądowy, gdyż przedstawia zagadnienie z jednym stopniem swobody (dwuwymiarowa przestrzeń fazowa). Nie uwzględnia on przypadków zdegenerowanych, gdy punktu krytyczne nie są izolowane, lecz zapełniają gęsto pewną krzywą lub powierzchnię. Podobieństwo przedstawionych wykresów do trajektorii oscylatora harmonicznego

$$\mathcal{H}_{\mathrm{o}} = \tfrac{1}{2}(X^2 + \omega^2 x^2),$$

lub „antyoscylatora" z odpychającą siłą

$$\mathcal{H}_{\mathrm{a}} = \tfrac{1}{2}(X^2 - \omega^2 x^2),$$

nie jest przypadkowe. Badanie stabilności liniowej polega w istocie na stwier-



Rysunek 2.14: Eliptyczny punkt stabilny (z lewej) i hiperboliczny punkt niestabilny (z prawej).

dzeniu, który z tych dwóch modeli przypomina ruch układu w dostatecznie małym otoczeniu punktu krytycznego.

Rozpatrzmy równania układu o K stopniach swobody, opisanego zmiennymi $\boldsymbol{\xi} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$, z funkcją Hamiltona $\mathcal{H}$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}\,\nabla\mathcal{H} \equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.29}$$

gdzie $\mathbf{J}$ to standardowa macierz symplektyczna

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Załóżmy, że dla zmiennych $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0$, równania (2.29) posiadają punkt krytyczny $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_0) = \mathbf{0}$. Interesuje nas zachowanie małego przyrostu $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ zdefiniowanego jako odchylenie od punktu krytycznego, a więc $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \hat{\boldsymbol{\xi}}$. Zauważmy, że transformacja $\boldsymbol{\xi} \to \hat{\boldsymbol{\xi}}$ jest kanoniczna, gdyż sprowadza się do elementarnej translacji. Badanie **stabilności liniowej** sprowadza się do analizy ruchu w zmiennych $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ opisanej układem równań zlinearyzowanych w otoczeniu $\boldsymbol{\xi}_0$. Jeśli więc podstawimy $\boldsymbol{\xi}_0 + \hat{\boldsymbol{\xi}}$ w miejsce $\boldsymbol{\xi}$ w równaniach (2.29), to w wyniku linearyzacji otrzymamy

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_0 + \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\xi}}}{\mathrm{d}t} \approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_0) + D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_0)\,\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_0) + \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}_0)\,\hat{\boldsymbol{\xi}},$$

gdzie $D\boldsymbol{F}$ oznacza macierz Jacobiego funkcji wektorowej $\boldsymbol{F}$ względem wektora zmiennych $\boldsymbol{\xi}$. W równaniu tym pochodna $\dot{\boldsymbol{\xi}}_0 = \mathbf{0}$, gdyż są to wartości stałe, natomiast $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_0) = \mathbf{0}$ z definicji punktu krytycznego. Pozostaje więc tak zwany **układ równań wariacyjnych**

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\xi}}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}_0)\,\hat{\boldsymbol{\xi}}, \tag{2.30}$$

będący układem równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach (pochodne składające się na macierz $\mathbf{M}$ obliczamy w punkcie krytycznym $\boldsymbol{\xi}_0$ więc są stałe).

Macierz Jaocbiego $\mathbf{M}$ jest macierzą kwadratową stopnia $2K$ i ma postać

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_{2K}} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial F_{2K}}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2K}}{\partial \xi_{2K}} \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

W przypadku kanonicznym jest to zarazem macierz drugich pochodnych hamiltonianu $\mathcal{H}$, gdyż skoro $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}\nabla\mathcal{H} = \boldsymbol{F}$, to

$$\mathbf{M} = D\boldsymbol{F} = D\left(\mathbf{J}\nabla\mathcal{H}\right) = \mathbf{J}DD^{\mathrm{T}}\mathcal{H} = \mathbf{JH}.$$

Macierz drugich pochodnych, zwana macierzą Hessego, jest symetryczna, a jej elementy to

$$H_{ij} = D_i D_j \mathcal{H} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j}.$$

Skoro jednak wektor stanu $\boldsymbol{\xi}$ składa się z wektora współrzednych uogólnionych $\boldsymbol{r}$ i wektora pędów uogólnionych $\boldsymbol{R}$, to możemy rozbić macierz Hessego na cztery bloki:

$$\mathbf{A} = D_{\boldsymbol{r}} D_{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} \mathcal{H}, \quad \text{czyli} \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_i \, \partial r_j},$$

$$\mathbf{B} = D_{\boldsymbol{R}} D_{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} \mathcal{H}, \quad \text{czyli} \quad B_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial R_i \, \partial R_j},$$

$$\mathbf{C} = D_{\boldsymbol{R}} D_{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} \mathcal{H}, \quad \text{czyli} \quad C_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_i \, \partial R_j},$$

oraz czwarty, $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = D_{\boldsymbol{r}} D_{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} \mathcal{H}$. Tak więc, macierz równań wariacyjnych $\mathbf{M}$ przybiera postać blokową

$$\mathbf{M} = \mathbf{JH} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{C} \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Jeśli rozwiązanie zlinearyzowanego układu (2.30) jest ograniczone, to mówimy, że położenie równowagi $\boldsymbol{\xi}_0$ jest **liniowo stabilne**.

Z teorii równań różniczkowych liniowych wiemy, że równania typu (2.30) z nieosobliwą macierzą $\mathbf{M}$ posiadają rozwiązanie w postaci superpozycji $2K$ liniowo niezależnych rozwiązań

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{k=1}^{2K} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k.$$

Dla poszczególnych rozwiązań można przyjąć postać

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_k = \boldsymbol{\alpha}_k \, \exp \lambda_k \, t, \tag{2.33}$$

gdzie λ_k jest jedną z **wartości własnych** macierzy $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}_0)$, to znaczy rozwiązaniem **równania charakterystycznego**

$$\det \left(\mathbf{M} - \lambda \, \mathbf{E}_{2K} \right) = 0, \tag{2.34}$$

czyli

$$\det \begin{bmatrix} M_{1,1}-\lambda & M_{1,2} & \cdots & M_{1,2K} \\ M_{2,1} & M_{2,2}-\lambda & \cdots & M_{2,2K} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ M_{2K,1} & M_{2K,2} & \cdots & M_{2K,2K}-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Jeśli chodzi o $\boldsymbol{\alpha}_k$, to gdy λ_k jest pierwiastkiem pojedynczym, oznacza on wektor stałych dowolnych. Dla pierwiastków wielokrotnych jest to wektor wielomianów zmiennej t, ale tym przypadkiem nie będziemy się obecnie zajmować.

Geneza równania charakterystycznego jest prosta: podstawiamy (2.33) do równań wariacyjnych (2.30) (zakładając, że $\boldsymbol{\alpha}_k$ jest stały) i mnożymy obie strony przez $\exp(-\lambda_k t)$. Otrzymujemy „zagadnienie własne" macierzy $\mathbf{M}$

$$\lambda_k \boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{M}\,\boldsymbol{\alpha}_k,$$

czyli

$$(\mathbf{M} - \lambda_k \mathbf{E}_{2K})\,\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}.$$

Jest to układ $2K$ równań jednorodnych z niewiadomymi $\boldsymbol{\alpha}_k$. Układ taki posiada zawsze rozwiązanie trywialne $\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$, które nie interesuje nas z punktu widzenia analizy stabilności. Ważniejsze są rozwiązania nietrywialne, a te istnieją wtedy i tylko wtedy gdy wyznacznik macierzy głównej układu jest równy 0. I tak dochodzimy do równania charakterystycznego (2.34).

Jest to równanie stopnia $2K$ i tyle też pierwiastków zespolonych

$$\lambda_k = a_k + i\,b_k$$

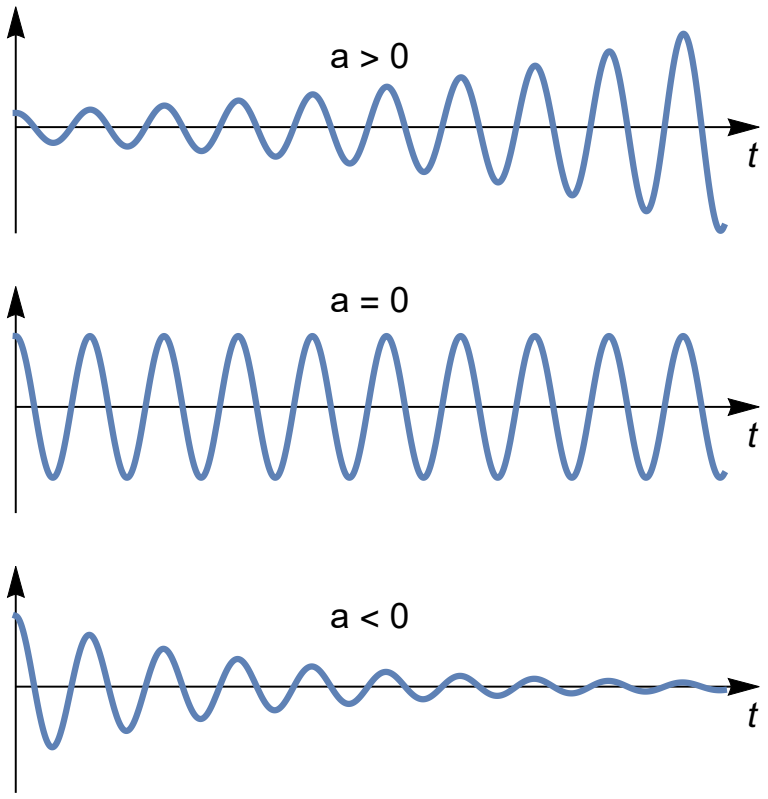
powinno ono posiadać (uwzględniając krotność pierwiastków). Jeśli więc zamiast poszukiwać dokładnego rozwiązania układu (2.30) ograniczymy się do znalezienia wartości własnych λ_k macierzy $\mathbf{M}$, to rozpatrujemy tzw. **stabilnośc spektralną** punktu krytycznego. Przyjmujemy wtedy, że rozwiązanie (2.33) układu zlinearyzowanego (2.30) przybiera postać superpozycji wyrazów typu

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_k = \boldsymbol{\alpha}_k \exp(a_k\ t)\ [\cos b_k t + i\ \sin b_k t]\,, \tag{2.35}$$

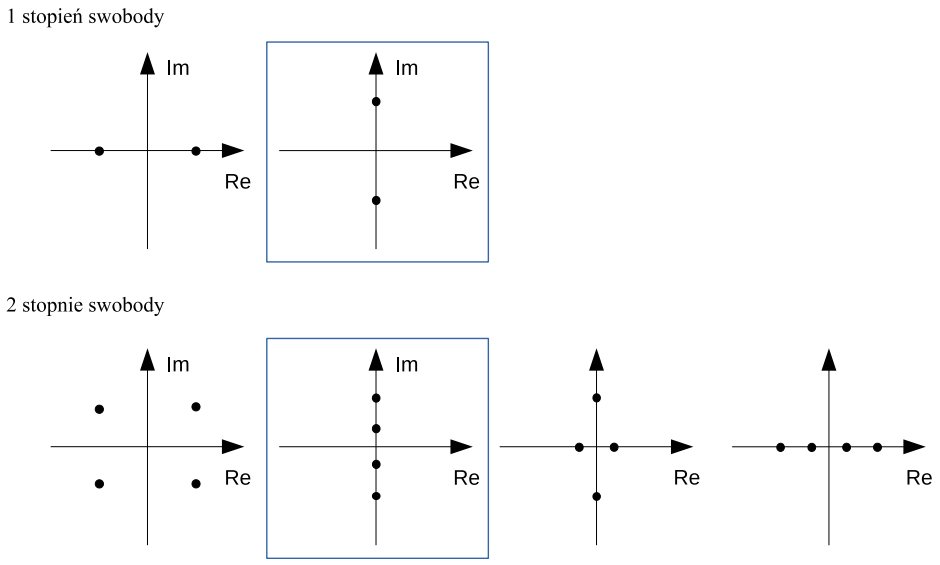
więc jeśli dla którejkolwiek z wartości własnych część rzeczywista a_k jest dodatnia, to $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k$ może rosnąć nieograniczenie i punkt krytyczny uznajemy za niestabilny. W przeciwnym przypadku mamy punkt spektralnie stabilny.

Macierze równań wariacyjnych $\mathbf{M}$ otrzymanych z równań Hamiltona (tzw. macierze hamiltonowskie) mają ważną właściwość: ich wartości własne

$$\lambda_k = a_k + ib_k,$$



Rysunek 2.15: Zachowanie funkcji $\exp(a\,t)\cos bt$ dla $b \neq 0$ i różnych znaków parametru a



Rysunek 2.16: Możliwe konfiguracje wartości własnych hamiltonowskiej macierzy równań wariacyjnych na płaszczyźnie zespolonej (tylko dla pierwiastków jednokrotnych). Ramką wyróżnione są sytuacje odpowiadające rozwiązaniom stabilnym.

pojawiają w postaci par lub czwórek (rys. 2.16):

- Jeśli dla pewnej wartości własnej λ_j mamy $a_j = 0$ lub $b_j = 0$, to towarzyszy jej wartość własna $\lambda_{j+1} = -\lambda_j$.
- Jeżeli dla pewnej wartości własnej λ_j mamy $a_j \neq 0$ i $b_j \neq 0$, to towarzyszą jej trzy wartości własne $\lambda_{j+1} = -\lambda_j$, $\lambda_{j+2} = \overline{\lambda}_j$, $\lambda_{j+3} = -\overline{\lambda}_j$.

Wystarczy więc stwierdzić, że któraś wartość własna układu z macierzą hamiltonowską ma niezerową część rzeczywistą, a już możemy być pewni niestabilności punktu krytycznego. Jeśli zaś wszystkie wartości własne są czysto urojone, to punkt równowagi nazywamy spektralnie stabilnym.

Stabilność spektralna jest równoważna stabilności liniowej, o ile tylko wśród wartości własnych nie znajdują się pierwiastki wielokrotne równania charakterystycznego (bo wtedy rozwiązanie nie ma postaci (2.33)). Może też się zdarzyć, że zaniedbane wyrazy nieliniowe $O(\hat{\boldsymbol{\xi}}^2)$ mają niezaniedbywalny wpływ i wtedy stabilność liniowa przestaje być wiarygodna. Natomiast niestabilność liniowa przesądza o wszystkich pozostałych rodzajach niestabilności.

WYKŁAD 10

Równania wariacyjne dla punktów Lagrange'a

Przejdźmy teraz do sformułowania równań wariacyjnych dla punktów Lagrange'a. Przyjmując wektor stanu zmiennych bezwymiarowych

$$\boldsymbol{\xi} = (x, y, z, X, Y, Z)^{\mathrm{T}},$$

i funkcję Hamiltona (2.11), która prowadzi do równań ruchu (2.17), wyznaczamy postać macierzy $\mathbf{M}$ z wzorów (2.31) lub (2.32). Następnie podstawiamy te wartości zmiennych, które są wspólne dla wszystkich punktów Lagrange'a: $z_0 = 0$ i $Z_0 = 0$ (warunki **A**), oraz $X_0 = -y_0$ i $Y_0 = x_0$ (warunki **B**). Otrzymujemy wtedy układ równań wariacyjnych

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_{4,1} & M_{5,1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ M_{5,1} & M_{5,2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{6,3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
M_{4,1} &= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 3\left(\frac{1-\mu}{\rho_1^5}(x_0+\mu)^2 + \frac{\mu}{\rho_2^5}(x_0-1+\mu)^2\right), \\
M_{5,2} &= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y^2} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 3\left(\frac{1-\mu}{\rho_1^5} + \frac{\mu}{\rho_2^5}\right) y_0^2, \\
M_{6,3} &= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z^2} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} \\
M_{5,1} &= M_{4,2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x\, \partial y} = 3\left(\frac{1-\mu}{\rho_1^5}(x_0+\mu) + \frac{\mu}{\rho_2^5}(x_0-1+\mu)\right) y_0,
\end{aligned}
$$

oraz $\rho_1 = \sqrt{(x_0+\mu)^2 + y_0^2}$ i $\rho_2 = \sqrt{(x_0-1+\mu)^2 + y_0^2}$.

W układzie tym pozostawiliśmy dwie zmienne x_0 i y_0 odpowiadające lokalizacji wybranego punktu Lagrange'a.

Wydzielenie równań dla $\hat{z}$ i $\hat{Z}$

Zauważmy, że układ (2.36) można rozbić na dwa osobne, wzajemnie niezależne podukłady, z których jeden opisywać będzie ruch w zmiennych $\hat{z}$ i $\hat{Z}$ a drugi – ruch w pozostałych zmiennych. W ten sposób możemy uprościć rozważania, gdyż zamiast badać wartości własne macierzy 6×6 zaczniemy od prostej macierzy 2×2. Co więcej, gdyby już w tym momencie okazało się, że podukład dla $\hat{z}$ i $\hat{Z}$ ma rzeczywiste wartości własne, to moglibyśmy na tym zakończyć całą procedurę. Równania dla pary $\hat{z}, \hat{Z}$ mają postać

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ M_{6,3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{Z} \end{bmatrix}, \tag{2.37}
$$

Wprowadźmy wielkość dodatnią

$$
\beta^2 = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} > 0. \tag{2.38}
$$

Dzięki tej definicji możemy przyjąć

$$
M_{6,3} = -\beta^2 < 0
$$

i rozwiązaniem równania charakterystycznego macierzy układu (2.37)

$$
\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -\lambda \end{bmatrix} = 0,
$$

czyli

$$\lambda^2 + \beta^2 = 0, \tag{2.39}$$

są dwie sprzężone liczby czysto urojone $\lambda = \pm i\,\beta$. W tej sytuacji nie możemy jeszcze określić stabilności punktów Lagrange'a i musimy poczekać na wyniki badania pozostałych czterech równań wariacyjnych. Stwierdzamy jedynie, że w razie pojawienia się niestabilności, ucieczka od punktów krytycznych odbywać się będzie raczej w płaszczyźnie xy niż w kierunku osi Oz.

Równania wariacyjne w płaszczyźnie xy (skrót)

Po oddzieleniu równań (2.37) od (2.36), pozostaje nam do zbadania układ

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ M_{4,1} & M_{5,1} & 0 & 1 \\ M_{5,1} & M_{5,2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

Równaniem charakterystycznym tej macierzy jest

$$\lambda^4 + b\,\lambda^2 + c = 0.$$

gdzie

$$\begin{aligned} b &= 2 - M_{4,1} - M_{5,2}, \\ c &= 1 - M_{5,1}^2 + M_{4,1}M_{5,2} + M_{4,1} + M_{5,2}. \end{aligned}$$

Żeby punkt Lagrange'a był liniowo stabilny, wartości własne λ muszą być czysto urojone, a więc dla $\gamma = \lambda^2$ pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$\gamma^2 + b\gamma + c = 0,$$

muszą być rzeczywiste i ujemne, co prowadzi do elementarnych warunków

$$\Delta = b^2 - 4c > 0, \qquad -\gamma_1 - \gamma_2 = b > 0, \qquad \gamma_1\gamma_2 = c > 0.$$

Używając nierówności ostrych pozostawiamy poza rozważaniami wielokrotne wartości własne.

Podstawiając położenie poszczególnych punktów Lagrange'a otrzymujemy dla **punktów kolineranych** L_1, L_2, L_3 wniosek, że są one liniowo niestabilne, a więc **niestabilne** także w sensie ogólniejszym. Pełne wyprowadzenie jest tu utrudnione przez brak dokładnego wzoru na x_0.

Analiza trójkątnych punktów libracyjnych L_4 i L_5 jest łatwiejsza, gdyż mamy proste wyrażenia

$$M_{4,1} = -\frac{1}{4}, \qquad M_{5,2} = \frac{5}{4}, \qquad M_{5,1} = \frac{\sqrt{27}}{4}\left(1 - 2\mu\right),$$

wynikające z podstawienia $\rho_1 = \rho_2 = 1$, oraz $x_0 = (1-2\mu)/2$ i $y_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mamy więc

$$b = 1 > 0, \qquad c = \frac{27}{4}\mu(1-\mu) > 0,$$

spełnione wprost dla $0 < \mu \leqslant \frac{1}{2}$ i warunek

$$\Delta = 27\mu^2 - 27\mu + 1 > 0.$$

Znajdując pierwiastki tego trójmianu stwierdzamy, że **punkty trójkątne są liniowo stabilne** dla

$$\mu < \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}\right) \approx 0.03852\ldots \tag{2.41}$$

a niestabilne dla większych wartości stosunku mas μ.

Stabilność liniowa nie zawsze jest dostatecznym kryterium. Uwzględniając wyrazy wyższego rzędu w równaniach wariacyjnych znajdujemy dwa wyjątki od stabilności linowej w kołowym ograniczonym zagadnieniu trzech ciał. Mają one miejsce dla

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{45}\sqrt{1833}\right) \approx 0.0243\ldots$$

oraz dla

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2}{45}\sqrt{117}\right) \approx 0.0135\ldots$$

Punktu trójkątne są wtedy niestabilne mimo, iż spełniony jest warunek (2.41).

2.3 Rozwiązania Lagrange'a w Układzie Słonecznym, orbity halo

Rozwiązania Lagrange'a zagadnienia trzech ciał traktowane były początkowo jako ciekawostka matematyczna. Okazało się jednak, że są one realizowane w Układzie Słonecznym. Z oczywistych względów jedynie rozwiązania trójkątne mogą być realizowane w sposób trwały. Klasycznym przykładem są tu dwie

grupy planetoid zwane trojańskimi. Nazwa ta wywodzi się z czasów, gdy znaliśmy tylko po kilka obiektów w okolicach punktów trójkątnych układu Słońce–Jowisz. W pobliżu L_4 poruszali się wtedy niemal wyłącznie „Grecy" z *Iliady*, pomijając 624 Hektora, natomiast dla obiektów okolicach punktu L_5 – „Trojańczyków" – przeważały imiona mieszkańców Troi (ale i tu trafiały się wyjątki jak 617 Patroklos). Ponieważ stosunek mas Jowisza i Słońca jest dostatecznie mały ($\mu = 10^{-3}$), trójkątne punkty Lagrange'a są stabilne i planetoidy nie uciekają z ich otoczenia mimo, iż nie mamy tu do czynienia z idealnym kołowym zagadnieniem ograniczonym (mimośród orbity Jowisza jest rzędu 0.05). Dziś znamy już ponad 5000 planetoid w obu grupach łącznie.

Od niedawna wiemy, że także Uran, Neptun, Mars i Ziemia posiadają planetoidy w punktach trójkątnych (zwane często także planetoidami trojańskimi).

W układzie Ziemia–Księżyc punkty trójkątne też są wyróżnione: znajdują się w nich tak zwane księżyce pyłowe odkryte przez Kazimierza Kordylewskiego w roku 1961. Ponieważ są to obłoki pyłu, ich badanie nie może ograniczać się jedynie do metod kołowego zagadnienia ograniczonego, lecz trzeba uwzględnić również siłę ciśnienia promieniowania słonecznego (tzw. zagadnienie fotograwitacyjne). Dla układu Ziemia-Księżyc parametr $\mu \approx 0.01 < 0.0385$, jest on formalnie zgodny ze stabilnością punktów trójkątnych, ale tylko przy zaniedbaniu ciśnienia światła na cząstki pyłu. Istnienie księżyców Kordylewskiego było systematycznie podważane, gdyż brakowało obserwacji innych niż wykonane gołym okiem przez odkrywcę. Dopiero w roku 2019 uzyskano zdjęcia z wykorzystaniem polaryzacji światła, które potwierdziły zagęszczenie pyłu w okolicach punktów trójkątnych, zaś model teoretyczny sugeruje, że są to twory powstające dzięki przejściowemu uwięzieniu pyłu, a więc niestabilne i wymagające dopływu materii. Ten zaś jest nieregularny, co może wpływać na możliwość obserwowania księżyców Kordylewskiego w różnych latach.

Realizacje rozwiązań trójkątnych odnajdujemy również wśród księżyców planet. W układzie Saturna małe księżyce Helena i Polideukes znajdują się w punktach trójkątnych pary Saturn–Dione, a Telesto i Kalipso w punktach trójkątnych układu Saturn–Tetyda. Znajdujemy tam również trójkątną konfigurację Saturn–Janus–Epimeteusz, jednak jest ona dość nietypowa z dwóch względów: po pierwsze, oscylacje wokół położenia równowagi mają amplitudę sięgającą stukilkudziesięciu stopni a po drugie, oba księżyce mają porównywalne masy, a więc nie można tu mówić o zagadnieniu ograniczonym. Układ ten należy rozpatrywać jako rozwiązanie trójkątne ogólnego zagadnienia trzech ciał (orbity homograficzne). Dla ogólnego zagadnienia trzech ciał o masach m_1, m_2 i m_3 dysponujemy znanym od roku 1875 kryterium sta-

bilności liniowej podanym przez Routha. Układ trójkątny pozostaje stabilny jeśli

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} > 27. \tag{2.42}$$

Zauważmy, że gdy jedna z mas dąży do zera, warunek Routha pokrywa się z (2.41).

Choć punkty kolinearne są niestabilne, to w ich otoczeniu mogą pojawić się szczególne rozwiązania w postaci orbit okresowych zwanych orbitami halo. Są to orbity stabilne, co oznacza, że w ich otoczeniu mogą pojawić się ograniczone w przestrzeni orbity nieokresowe, zapełniające obszar toroidalny, zwane orbitami Lissajous.

Rozdział 3

Metody analityczne mechaniki nieba

WYKŁAD 11

Wiemy już, że w mechanice nieba występują powszechnie zagadnienia niecałkowalne. W jaki sposób możemy otrzymać ich przybliżone rozwiązania ? Zależnie od potrzeb, można użyć **metod numerycznych** lub **metod analitycznych**. Powstaje wtedy rozwiązanie równań ruchu zwane żargonowo **teorią ruchu** z przymiotnikiem „analityczna" lub „numeryczna".

Metody analityczne posługują się rachunkiem zaburzeń i mogą prowadzić do bardzo skomplikowanych szeregów. Są to szeregi potęgowe małego parametru, którym może być stosunek mas, spłaszczenie planety itp.

Metody numeryczne są mniej skomplikowane od analitycznych; przy ich pomocy możemy wyliczyć pojedynczą trajektorię układu ciał dla zadanych warunków początkowych. Tu także wykorzystuje się szeregi lub wielomiany ale związane z potęgami małego przyrostu czasu.

O ile metody analityczne dostarczają wyjaśnienia fizycznego zjawisk i ich zależności od rozmaitych parametrów, o tyle metody numeryczne potrafią zapewnić bardzo wysoką dokładność pojedynczej trajektorii. W starszych podręcznikach można spotkać się z terminami „perturbacje ogólne" dla metod analitycznych i „perturbacje szczególne" dla metod numerycznych.

3.1 Szeregi Fouriera anomalii średniej

3.1.1 Szereg Fouriera

Przy stosunkowo słabych ograniczeniach (nie wymagamy nawet ciagłości), funkcję $F(x)$ można przedstawić na skończonym przedziale $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ o długości 2π w postaci zbieżnego *szeregu Fouriera*

$$F(x) = \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{k\geqslant 1} \left(c_k \cos kx + s_k \sin kx\right). \tag{3.1}$$

Jeśli zaś funkcja $F(x)$ jest funkcją 2π-okresową, to znaczy jeśli

$$\forall x: \quad F(x+2\pi) = F(x),$$

wtedy szereg Fouriera (3.1) obejmuje całą dziedzinę funkcji $F(x)$. Założenie długości przedziału lub okresu równej 2π nie jest żadnym istotnym ograniczeniem, gdyż zawsze można liniowo przeskalować zmienną tak, aby spełnić ten warunek. **Współczynniki** c_k, s_k poszczególnych **harmonik**[1] oraz wyraz stały c_0 zadane są wzorami całkowymi

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\ dx, \\ s_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\ dx, \end{aligned} \tag{3.2}$$

a w szczególności dla $k=0$ mamy $s_0 = 0$ oraz

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\ dx = 2\,\langle F(x)\rangle_x. \tag{3.3}$$

Ten ostatni wzór zasługuje na szczególną uwagę, gdyż definiuje on zarazem wartość średniej całkowej funkcji $F(x)$.

Ponieważ całka z dowolnej funkcji nieparzystej na przedziale od $-\pi$ do π jest równa 0, możemy zauważyć, że:

1. Jeśli $F(x)$ jest funkcją parzystą, to $F(x)\sin kx$ jest funkcją nieparzystą i mamy $s_k = 0$, natomiast ze względu na symetrię

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)\cos kx\ dx. \tag{3.4}$$

[1] k-tą harmoniką nazywamy pojedynczy wyraz $(c_k \cos kx + s_k \sin kx)$.

2. Jeśli $F(x)$ jest funkcją nieparzystą, to $F(x)\cos kx$ jest funkcją nieparzystą i mamy $c_k = 0$ oraz

$$s_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin kx\ dx. \tag{3.5}$$

Tak więc funkcję parzystą aproksymujemy szeregiem funkcji parzystych ($\cos kx$) zaś nieparzystą – szeregiem funkcji nieparzystych ($\sin kx$). **Wartość średnia funkcji nieparzystej wynosi zero**.

Jeśli w równaniu (3.1) sumowanie przebiega w zakresie $1 \leqslant k < \infty$, to prawa strona równości jest sumą **szeregu trygonometrycznego**, a jeśli zakres sumowania jest skończony ($1 \leqslant k \leqslant N$), to prawą stronę nazywamy **wielomianem trygonometrycznym** stopnia N.

3.1.2 Funkcje Bessela i inne funkcje specjalne

Funkcje Bessela pierwszego rodzaju

Funkcje Bessela to tylko czubek góry lodowej zbudowanej z rozmaitych **funkcji specjalnych** wykorzystywanych w mechanice nieba. Funkcje $J_k(x)$ są ważne nie tylko same w sobie, lecz również dlatego, że wiele innych funkcji specjalnych wyraża się jako szeregi funkcji Bessela.

Funkcję Bessela k-tego rzędu $J_k(x)$ zmiennej rzeczywistej x można zdefiniować na różne sposoby. Wymienimy tylko cztery:

1. Wzorem całkowym[2]

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(k\varphi - x\,\sin\varphi\right) d\varphi. \tag{3.6}$$

   Warto zwrócić uwagę na fakt, że argument funkcji cosinus w tym wzorze zawiera wyrażenie przywodzące na myśl równanie Keplera $M = E - e\sin E$.

2. Jako rozwiązanie równania różniczkowego

$$x^2\,y'' + x\,y' + \left(x^2 - k^2\right)\,y = 0, \tag{3.7}$$

[2] sposób o tyle typowy, że wiele funkcji specjalnych wprowadza się w fizyce do oznaczenia całki niemożliwej do wyrażenia poprzez funkcje elementarne.

zwanego równaniem Bessela. Z odpowiednimi warunkami początkowymi lub brzegowymi dostajemy jedno z dwóch niezależnych rozwiązań w postaci $y(x) = J_k(x)$. Konkretnie, ma to być rozwiązanie nieosobliwe dla $x = 0$.

3. Jako sumę szeregu potęgowo (tylko dla naturalnych k)

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,(j+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}. \tag{3.8}$$

Jeśli musimy wyliczyć funkcję Bessela której rząd k jest liczbą całkowitą ujemną, to wystarczy skorzystać z własności

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x). \tag{3.9}$$

Z wzoru (3.8) płyną dwa ważne wnioski:

$$J_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad k = 0, \\ 0 & \text{dla} \quad k \neq 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

oraz (dla $k > 0$)

$$J_k(x) = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k + O(x^{k+2}). \tag{3.11}$$

Dla $k = 0$ powyższy wzór dawałby trywialne $J_0(x) = 1$, więc stosowniejszym przybliżeniem jest

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + O(x^4). \tag{3.12}$$

4. Jako funkcje spełniające wzór rekurencyjny

$$J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} J_k(x) - J_{k-1}(x). \tag{3.13}$$

Ściślej rzec biorąc, wzór rekurencyjny może służyć do zdefiniowania funkcji tylko pod warunkiem, że dodamy do niego minimalną ilość „startowych" funkcji. W przypadku funkcji Bessela wystarcza dołączyć do (3.13) definicję dwóch dowolnych $J_k(x)$ – na przykład $J_0(x)$ i $J_1(x)$.

Wspomnieliśmy już, że dla funkcji specjalnej należy znaleźć sposób obliczania pochodnych. W przypadku pierwszej pochodnej funkcji Bessela mamy do dyspozycji jeden z dwóch wzorów

$$J'_k(x) = \tfrac{1}{2}(\, J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)\,), \tag{3.14}$$

lub

$$J'_k(x) = -J_{k+1}(x) + \frac{k}{x} J_k(x). \tag{3.15}$$

Zastosowanie do równania Keplera

Jak wiadomo, równanie Keplera

$$M = E - e\sin E,$$

wiążące anomalię średnią $M = n(t - t_p)$ i anomalię mimośrodową na orbicie eliptycznej o mimośrodzie e jest równaniem przestępnym i zadaje $E(M, e)$ w sposób uwikłany. Jednym z podstawowych problemów praktycznych mechaniki nieba jest znalezienie jawnego związku między anomaliami, co pozwala w sposób przybliżony wyrazić położenie i prędkość na orbicie jako jawne funkcje anomalii średniej, a więc i czasu. Spróbujmy rozwiązać ten problem rozwijając funkcję $e\sin E$ w szereg Fouriera względem anomalii średniej M. Wiemy, że ogólna postać takiego szeregu to

$$e\sin E = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(e)\ \sin kM,$$

gdzie

$$s_k(e) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e\sin E\sin kM\ dM. \tag{3.16}$$

Całkowanie odbywa się tu od perycentrum, gdzie $M = E = 0$, do apocentrum, gdzie $M = E = \pi$.

Problemem zasadniczym jest obecność dwóch różnych anomalii w (3.16), więc najpierw całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} s_k &= -\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} e\sin E\,\frac{d(\cos kM)}{dM}\,dM \\ &= -\frac{2e}{k\pi}\sin E\,\cos kM\Big|_{M=0}^{M=\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kM\frac{d(e\sin E)}{dM}\,dM. \end{aligned}$$

Pierwszy wyraz w drugim wierszu znika, gdyż $\sin(0) = \sin\pi = 0$. W drugim wykorzystamy równanie Keplera

$$\frac{d(e\sin E)}{dM} = \frac{d(E-M)}{dM} = \frac{dE}{dM} - 1,$$

a wtedy

$$s_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kM\frac{dE}{dM}\,dM - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kM\,dM$$

$$= \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos kM\, dE - \frac{2}{k^2\pi}\sin kM\Big|_0^\pi .$$

Drugi wyraz znika, więc zostaje tylko pierwszy, w którym podstawiamy równanie Keplera

$$s_k = \frac{2}{k}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(kE - ke\sin E\right) dE. \tag{3.17}$$

Porównanie (3.17) z definicją całkową funkcji Bessela (3.6) prowadzi do wniosku, że

$$e\sin E = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\, J_k(ke)\ \sin kM, \tag{3.18}$$

więc równanie Keplera przybiera postać

$$E = M + e\sin E = M + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\, J_k(ke)\ \sin kM. \tag{3.19}$$

Wiele innych funkcji zagadnienia dwóch ciał można wyrazić poprzez anomalię średnią przy użyciu funkcji Bessela. Na przykład funkcję a/r rozwijamy łatwo na podstawie (3.19) gdyż mamy

$$\frac{a}{r} = \frac{dE}{dM},$$

a skoro tak, to różniczkując (3.19) względem M otrzymamy

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke)\ \cos kM. \tag{3.20}$$

Funkcje Bessela wystarczają do rozwinięcia $\sin mE$, $\cos mE$, r/a, $\cos f$, $\sin f$ oraz $(r/a)\cos f$ i $(r/a)\sin f$. Inne ważne rozwinięcia otrzymujemy korzystając z tak zwanych współczynników Hansena $X_k^{n,m}(e)$ definiowanych jako amplitudy fourierowskie

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n [\cos mf + i\sin mf] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,m}(e)\ [\cos kM + i\sin kM]\,. \tag{3.21}$$

Niektóre ze współczynników Hansena są funkcjami elementarnymi mimośrodu, a inne wyraża się jako szeregi funkcji Bessela.

3.1.3 Wartości średnie w ruchu keplerowskim

Wyznaczanie wartości średnich funkcji w zagadnieniu dwóch ciał pełni ważną rolę w rachunku zaburzeń dla orbitalnego ruchu perturbowanego. Jest ono w zasadzie elementarne i sprowadza się do kilku typowych sytuacji związanych z całką

$$\langle F(x)\rangle_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.22}$$

Zacznijmy od zasad ogólnych:

a) Uśrednianie jest operacją liniową; jeśli α i β oznaczają stałe, to

$$\langle \alpha\,\Phi + \beta\,\Psi\rangle = \alpha\,\langle\Phi\rangle + \beta\,\langle\Psi\rangle. \tag{3.23}$$

W szczególności, dla funkcji stałej,

$$\langle\alpha\rangle = \alpha. \tag{3.24}$$

b) Wartość średnia każdej funkcji nieparzystej wynosi zero.

c) Jeśli $k \neq 0$ jest liczbą całkowitą, zaś α jest dowolną stałą, to

$$\langle\sin(k\,x+\alpha)\rangle_x = \langle\cos(k\,x+\alpha)\rangle_x = 0. \tag{3.25}$$

Oczywiście, dla $k = 0$, mamy do czynienia z uśrednianiem funkcji stałej.

Jeśli interesuje nas wartość średnia względem anomalii średniej M w ruchu eliptycznym, a uśredniane wyrażenie jest zadane jako funkcja anomalii prawdziwej f lub mimośrodowej E, to możemy skorzystać z reguł dotyczących całkowania przez podstawienie. Przypomnijmy, że różniczkując równanie Keplera otrzymamy

$$dM = (1 - e\cos E)\,dE = \frac{r}{a}\,dE,$$

natomiast II prawo Keplera poprzez

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2},$$

oraz $\mathrm{d}M = n\,\mathrm{d}t$ i III prawo Keplera $n^2a^3 = \mu$, prowadzi do

$$\mathrm{d}M = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{d}f.$$

Mamy więc

$$\langle \Phi(E) \rangle_M = \langle \Phi(E)\,(r/a) \rangle_E, \tag{3.26}$$

$$\langle \Phi(f) \rangle_M = \langle \Phi(f)\,(r/a)^2\,(1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \rangle_f. \tag{3.27}$$

W ruchu eliptycznym średnia względem anomalii średniej $\langle F \rangle_M$ jest zarazem wartością średnią względem czasu t.

3.2 Rachunek zaburzeń dla równań algebraicznych i przestępnych

3.2.1 Podstawy

Aby uchwycić istotę rachunku zaburzeń, rozpatrzmy poszukiwanie pierwiastka równania zaburzonego

$$f(y;\,\varepsilon) = 0, \tag{3.28}$$

w którym y jest zmienną (niewiadomą), zaś ε pełni rolę małego parametru (najczęściej zakładamy $|\varepsilon| \ll 1$). Rachunek zaburzeń możemy stosować wtedy, gdy znamy rozwiązanie tego równania dla $\varepsilon = 0$, czyli gdy potrafimy znaleźć wartość $y = x$ dla której

$$f(x;\,0) = 0.$$

Możemy wtedy znaleźć takie przekształcenie zmiennej $y \leftrightarrow x$, żeby w nowych zmiennych równanie zostało przekształcone do postaci $g(x) = f(x;0) = 0$. A wtedy z postaci przekształcenia $y = y(x)$ znajdziemy wartość pierwiastka równania (3.28).

Przykład trywialny: niech równanie (3.28) ma postać

$$f(y;\varepsilon) = y - \varepsilon = 0.$$

Dla $\varepsilon = 0$ równanie przechodzi w $y = 0$ i jego pierwiastkiem jest $y_0 = 0$. Wprowadzamy przekształcenie

$$y(x;\varepsilon) = x + \varepsilon.$$

Lewa strona równania zaburzonego zostaje przekształcona w

$$f(x+\varepsilon;\varepsilon) = (x+\varepsilon) - \varepsilon = x = g(x).$$

Rozwiązaniem $g(x) = 0$ jest $x = 0$, więc pierwiastkiem wyjściowego równania (3.28) jest $y = 0 + \varepsilon = \varepsilon$.

Przyjmijmy, że zależność od małego parametru pozwala na przedstawienie lewej strony równania w postaci sumy szeregu potęgowego względem małego parametru

$$f(y;\varepsilon) = f_0(y) + \varepsilon\, f_1(y) + \varepsilon^2\, f_2(y) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(y), \tag{3.29}$$

co prowadzi do

$$f(y;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(y) = 0. \tag{3.30}$$

Jeśli podstawiając $\varepsilon = 0$ do (3.28) otrzymamy łatwo rozwiązywalne równanie niezaburzone

$$f_0(y) \equiv f(y;\, 0) = 0, \tag{3.31}$$

którego pierwiastkiem jest $y = x$, to możemy uruchomić procedurę rachunku zaburzeń.

Zaczynamy od pytania o krotność pierwiastka równania (3.31), a dokładniej – tego z pierwiastków, który wybraliśmy jako x. Powiedzmy, że wynosi ona n (czyli $n = 1$ dla pierwiastka jednokrotnego, który spełnia $f_0(x) = 0$ i $f_0'(x) \neq 0$; krotność $n = 2$ dla pierwiastka podwójnego z $f_0(x) = f_0'(x) = 0$ i $f_0''(x) \neq 0$ i tak dalej).

Następnie zakładamy, że pierwiastek równania zaburzonego y można przedstawić jako sumę

$$y = x + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{n}}\, \Phi_j(x), \tag{3.32}$$

w której pojawiają się pewne funkcje Φ_j. Wyraz $\varepsilon^{\frac{j}{n}}\, \Phi_j(x)$ nazywamy **zaburzeniem (perturbacją) rzędu** j.

Jeśli podstawimy założoną wyżej postać pierwiastka do funkcji f, otrzymamy z niej nową funkcję g

$$f(y;\, \varepsilon) = f(x + \sum_{j \geqslant 1} \varepsilon^{\frac{j}{n}}\, \Phi_j(x);\, \varepsilon) = g(x;\varepsilon),$$

równą co do wartości funkcji f, ale posiadającą inna postać zależności od zmiennej. Środkowy człon powyższej równości zależy od x w sposób skomplikowany, dlatego zawsze sprowadzamy wynik podstawienia do postaci szeregu potęgowego

$$g(x;\varepsilon) = g_0(x) + \varepsilon^{\frac{1}{n}}\, g_1(x) + \varepsilon^{\frac{2}{n}}\, g_2(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{n}} g_k(x). \tag{3.33}$$

Nawet gdy $n \neq 1$, można tu nadal wykorzystać zwykły szereg Taylora z pomocniczą zmienną $\nu = \sqrt[n]{\varepsilon}$ (czyli $\varepsilon = \nu^n$) i rozwinięciem względem potęg ν^k w otoczeniu $\nu = 0$.

Zauważmy, że funkcje $g_0(x), \ldots, g_{n-1}(x)$ wywodzą się wyłącznie z wyrazu $f_0(y)$, gdyż już

$$\varepsilon f_1(y) = \varepsilon f_1(x) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{n}}\right),$$

a więc wyraz $\varepsilon f_1 = \varepsilon^{\frac{n}{n}} f_1$ może zasilić tylko funkcje g_n i następne.

Z definicji mamy $f_0(x) = g_0(x) = 0$, a dla pierwiastków podwójnych dodatkowo $f_0'(x) = g_0'(x) = 0$ i tak dalej, więc sumowanie w (3.33) zaczyna się w istocie od $k = n$ i mamy

$$g(x;\varepsilon) = \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{n}} g_k(x). \tag{3.34}$$

A zatem, skoro $f(y;\varepsilon) = g(x;\varepsilon) = 0$, to równanie zaburzone (3.29) dla zmiennej y przechodzi w równanie

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{n}} g_k(x) = 0, \tag{3.35}$$

to zaś powinno być spełnione dla każdego $g_k(x)$ osobno, czyli $g_k(x) = 0$ dla wszystkich k.

Łatwo to zrozumieć po przypomnieniu, że funkcje g_k zależą od x za pośrednictwem nieoznaczonych funkcji $\Phi_j(x)$ z równania (3.32). Spełnienie równania (3.35) uzyskujemy poprzez odpowiedni wybór Φ_j, a te zostały zdefiniowane jako niezależne od małego parametru, więc ε nie może się pojawić w równaniach służących do ich wyznaczenia.

Mamy więc do czynienia z następującą drabinką równań:

$$\begin{aligned} g_n(\Phi_1(x)) &= 0, \\ g_{n+1}(\Phi_1(x), \Phi_2(x)) &= 0, \\ &\dots \\ g_{n+k-1}(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_k(x)) &= 0, \end{aligned} \tag{3.36}$$

i tak dalej. Każde z nich zwiera tylko jedną nowa funkcję Φ_k oraz znane już z wcześniejszych równań funkcje $\Phi_{k-1}, \dots, \Phi_1$.

Rzadko się zdarza, byśmy byli w stanie znaleźć ogólny przepis na $\Phi_j(x)$ z dowolnie dużym indeksem j. Zazwyczaj musimy poprzestać na ograniczonej liczbie wyrazów i postępujemy według nastepujacego algorytmu **rachunku zaburzeń rzędu** K dla równania (3.30)

1. Wybieramy pierwiastek x równania niezaburzonego $f_0(x) = 0$ i określamy jego krotność n.

2. Wprowadzamy pomocniczy mały parametr $\nu = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

3. Zakładamy postać rozwiązania

$$y = x + \sum_{j=1}^{K} \nu^j \, \Phi_j(x) + O(\nu^{K+1}). \tag{3.37}$$

4. Rozwijamy w szereg potęgowy małego parametru ν lewą stronę równania, czyli znajdujemy

$$g(x;\nu) = \sum_{k \geqslant 0} \nu^{k\,n} f_k \left(x + \textstyle\sum_{j=1}^{K} \nu^j \, \Phi_j(x) \right) = \sum_{k=0}^{K+n-1} \nu^k g_k(x), \tag{3.38}$$

   to znaczy identyfikujemy wzory dla g_k wyrażonych przy pomocy funkcji Φ_j. Powinniśmy przy tym mieć $g_0(x) = \ldots = g_{n-1}(x) = 0$, niezależnie od wyboru funkcji Φ_j.

5. Dla $k = 1, \ldots, K$ rozwiązujemy równania

$$g_{n+k-1}(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_k(x)) = 0, \tag{3.39}$$

   znajdując kolejne $\Phi_k(x)$.

6. Znalezione $\Phi_k(x)$ podstawiamy do (3.37) otrzymując rozwiązanie przybliżone K-tego rzędu, które powinno spełniać równanie (3.30) z błędem rzędu $O\left(\varepsilon^{\frac{K+1}{n}}\right)$.

3.2.2 Przykład: Trójmian kwadratowy – pierwiastek pojedynczy

Elementarnym przykładem zastosowania rachunku zaburzeń może być poszukiwanie przybliżonego pierwiastka równania

$$f(y;\varepsilon) = \varepsilon y^2 + y - 1 = 0. \tag{3.40}$$

Krok 1: Równanie $f(y;0) = y - 1 = 0$, posiada pierwiastek pojedynczy $y = 1 = x$, gdyż $f'(x;0) = 1 \neq 0$.

Krok 2: Małym parametrem jest $\nu = \varepsilon$, gdyż krotność $n = 1$.

Krok 3: Z dokładnością $K = 3$ zakładamy postać rozwiązania

$$y = x + \varepsilon\Phi_1(x) + \varepsilon^2\Phi_2(x) + \varepsilon^3\Phi_3(x) + O(\varepsilon^4). \tag{3.41}$$

Krok 4: Rozwijamy lewą stronę równania (3.40). W obecnym przypadku można to zrobić wprost, wykonując mnożenia w

$$\begin{aligned} f(y;\varepsilon) &= \varepsilon\left(x+\varepsilon\Phi_1(x)+\varepsilon^2\Phi_2(x)+\varepsilon^3\Phi_3(x)\right)^2 \\ &\quad +x+\varepsilon\Phi_1(x)+\varepsilon^2\Phi_2(x)+\varepsilon^3\Phi_3(x)-1+O(\varepsilon^4), \end{aligned} \tag{3.42}$$

i odrzucając wyrazy rzędu $O(\varepsilon^4)$.

Można też podejść formalnie, wprowadzając do postaci (3.30) funkcje $f_0(y)=y-1$, $f_1(y)=y^2$ i pozostałe $f_k(y)=0$. Rozwijamy wtedy

$$f_k(y)=f_k(x)+\sum_{j=1}^{3-k}\frac{\varepsilon^j}{j!}\left[\frac{d^j f_k(y)}{d\varepsilon^j}\right]_{\varepsilon=0,y=x}+O(\varepsilon^{4-k}), \tag{3.43}$$

gdzie pochodna względem ε wynika z obecności małego parametry w transformacji (3.41), a więc

$$\begin{aligned} \frac{df_k(y)}{d\varepsilon} &= \frac{df_k(y)}{dy}\frac{dy}{d\varepsilon}=f_k'(y)y'(\varepsilon), \\ \frac{d^2f_k(y)}{d\varepsilon^2} &= f_k''(y)\left(y'(\varepsilon)\right)^2+f_k'(y)y''(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.44}$$

i tak dalej, gdzie $y(\varepsilon)$ oznacza prawą stronę wzoru wzoru (3.41). Mamy wtedy

$$\begin{aligned} f_0(y) &= x-1+\varepsilon\Phi_1(x)+\varepsilon^2\Phi_2(x)+\varepsilon^3\Phi_3(x)+O(\varepsilon^4), \\ f_1(y) &= x^2+\varepsilon\left(2x\Phi_1(x)\right)+\varepsilon^2\left(\Phi_1^2(x)+2x\Phi_2(x)\right)+O(\varepsilon^3), \\ f_k(y) &= 0, \text{ dla } k>1. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Tak, czy inaczej dostajemy

$$\begin{aligned} f(y;\varepsilon) &= f_0(y)+\varepsilon f_1(y) \\ &= x-1 \\ &\quad +\varepsilon\left(x^2+\Phi_1(x)\right) \\ &\quad +\varepsilon^2\left(2x\Phi_1(x)+\Phi_2(x)\right) \\ &\quad +\varepsilon^3\left(\Phi_1^2(x)+2x\Phi_2(x)+\Phi_3(x)\right)+O(\varepsilon^4) \\ &= g_0(x)+\varepsilon g_1(x)+\varepsilon^2 g_2(x)+\varepsilon^3 g_3(x)+O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Krok 5: Aby funkcja $g(x)$ składała się tylko z g_0, szukamy po kolei funkcji Φ_j.

$$\begin{aligned} g_1(x) = 0 &\rightarrow x^2 + \Phi_1 = 0 \rightarrow \Phi_1 = -x^2, \\ g_2(x) = 0 &\rightarrow 2x\Phi_1 + \Phi_2 = -2x^3 + \Phi_2 = 0 \rightarrow \Phi_2 = 2x^3, \\ g_3(x) = 0 &\rightarrow \Phi_1^2(x) + 2x\Phi_2(x) + \Phi_3(x) \\ &\quad = x^4 + 4x^4 + \Phi_3 = 0 \rightarrow \Phi_3 = -5x^4, \end{aligned} \tag{3.47}$$

Krok 6: Wzór przybliżony dla pierwiastka ma postać

$$\begin{aligned} y &= x - \varepsilon x^2 + 2\varepsilon^2 x^3 - 5\varepsilon^3 x^4 + O(\varepsilon^4) \\ &= 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Jak wiadomo, równanie (3.40) posiada dwa pierwiastki

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\varepsilon}}{\varepsilon}, \qquad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\varepsilon}}{\varepsilon}, \tag{3.49}$$

z których pierwszy jest osobliwy dla $\varepsilon \to 0$, zaś drugi posiada rozwinięcie w szereg MacLaurina względem ε zgodne z wzorem (3.48).

3.2.3 Przykład: Trójmian kwadratowy – pierwiastek podwójny

Aby zobaczyć, czemu musimy wprowadzić $\nu = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, przyjrzyjmy się prostemu równaniu

$$f(y;\varepsilon) = y^2 - \varepsilon = 0. \tag{3.50}$$

Dla $\varepsilon = 0$, jego pierwiastkiem jest $y = 0 = x$. Spróbujmy otrzymać rozwiązanie pierwszego rzędu ($K = 1$) zakładając niepoprawnie

$$y = x + \varepsilon\Phi_1(x) + O(\varepsilon^2). \tag{3.51}$$

Po podstawieniu uzyskujemy

$$f(y;\varepsilon) = (x + \varepsilon\Phi_1)^2 - \varepsilon + O(\varepsilon^2) = x^2 + \varepsilon(2x\Phi_1 - 1) + O(\varepsilon^2), \tag{3.52}$$

więc $g_0 = x = 0$, oraz

$$g_1 = 2x\Phi_1(x) - 1 = -1. \tag{3.53}$$

Jak widać, nie ma możliwości, aby doprowadzić do spełnienia $g_1(x) = 0$.

To, że procedura musiała zakończyć się fiaskiem, było jasne od początku, gdyż równanie (3.50) posiada dwa pierwiastki:

$$y_1 = -\sqrt{\varepsilon}, \qquad y_2 = \sqrt{\varepsilon}, \tag{3.54}$$

co nie pasuje do założenia (3.51). Natomiast przyjęcie $\nu = \sqrt{\varepsilon}$ i założenie

$$y = x + \sum_{j=1}^{K} \nu^j \Phi_j(x), \tag{3.55}$$

doprowadzi nas do rozwiązania dokładnego, w którym $\Phi_1^2 = 1$, zaś wszystkie pozostałe $\Phi_j = 0$.

Weźmy $K = 2$, i dla uproszczenia podstawiajmy od początku $x = 0$. Wtedy dla

$$y = \nu\Phi_1 + \nu^2\Phi_2 + O(\nu^3), \tag{3.56}$$

podstawienie musimy wykonać tak, aby dojść do funkcji g_{n-1+K} czyli g_3:

$$\begin{aligned} f(y;\varepsilon) &= (0 + \nu\Phi_1 + \nu^2\Phi_2 + O(\nu^3))^2 - \nu^2 \\ &= \nu^2\left(\Phi_1^2 - 1\right) + 2\nu^3\Phi_1\Phi_2 + O(\nu^4) \\ &= g_0 + \nu g_1 + \nu^2 g_2 + \nu^3 g_3 + O(\nu^4). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Skoro $g_0 = x = 0$, oraz $g_1 = 0$, to wybór Φ_1 następuje w warunku

$$g_2 = \Phi_1^2 - 1 = 0, \quad \rightarrow \quad \Phi_1 = \pm 1, \tag{3.58}$$

natomiast $g_3 = 2\Phi_1\Phi_2 = 0$ oznacza $\Phi_2 = 0$. Mamy więc dwa rozwiązania: $y = x \pm \nu$, co jest zgodne z rozwiązaniem dokładnym (3.54).

3.2.4 Przykład: Równanie Keplera

Rozpatrzymy równanie Keplera wiążace dla orbit eliptycznych anomalię średnią M, anomalię mimośrodową E i mimośród e

$$f(E;e) = E - M - e\sin E = 0. \tag{3.59}$$

Równanie to posiada formalną strukturę (3.30) ze zmienną $y = E$, małym parametrem $\varepsilon = e$ i funkcjami $f_0(y) = E - M$, $f_1(y) = -\sin E$, $f_k(y) = 0$ dla $k > 1$.

Dla $e = 0$, równanie niezaburzone $f_0(E) = 0$ posiada pierwiastek $E = M$ i jest to pierwiastek pojedynczy. Mamy więc $n = 1$ i $\nu = \varepsilon = e$.

Poszukajmy rozwiązania przybliżonego drugiego rzędu ($K = 2$). Założoną postacią rozwiązania (3.37) jest

$$E = M + e\,\Phi_1(M) + e^2\,\Phi_2(M) + O(e^3). \tag{3.60}$$

Podstawienie (3.60) do równania (3.59)

$$(M + e\Phi_1 + e^2\Phi_2) - M - e\,\sin\,(M + e\Phi_1 + e^2\Phi_2) = 0$$

prowadzi do postaci

$$e\,\Phi_1(M) - e\,\sin M + e^2\Phi_2(M) - e^2\Phi_1(M)\cos M = 0. \tag{3.61}$$

Równania (3.39) wypisujemy przyrównując do zera współczynniki pierwszej i drugiej potęgi mimośrodu

$$\begin{aligned} \Phi_1(M) - \sin M &= 0, \\ \Phi_2(M) - \Phi_1(M)\cos M &= 0 \end{aligned}$$

i bez trudu znajdujemy

$$\begin{aligned} \Phi_1(M) &= \sin M, \\ \Phi_2(M) &= \sin M\,\cos M. \end{aligned}$$

Tak więc, rozwiązaniem drugiego rzędu równania Keplera jest

$$E = M + e\sin M + e^2\,\sin M\,\cos M + O(e^3), \tag{3.62}$$

co łatwo sprawdzić porównując otrzymany wynik z szeregiem Fouriera (3.19) i rozwijając funkcje Bessela w szeregi potęgowe (3.8).

3.2.5 Przykład: Położenie punktu Lagrange'a L_1

Wróćmy do ograniczonego kołowego zagadnienia trzech ciał i spróbujmy rozwiązać metoda rachunku zaburzeń równanie (2.22), będące warunkiem na położenie punktu L_1 na osi x. Żeby uniknąć konfliku oznaczeń, przepiszemy je kładąc ξ zamiast współrzędnej x

$$\xi\,(\xi+\mu)^2(\xi-1+\mu)^2 - (1-\mu)\,(\xi-1+\mu)^2 + \mu\,(\xi+\mu)^2 = 0. \tag{3.63}$$

Małym parametrem zagadnienia będzie stosunek mas $\varepsilon = \mu$, a zmienną $y = \xi$, co pozwala nadać równaniu (3.63) formalną postać (3.30), gdzie

$$\begin{aligned} f_0(\xi) &= \left(\xi^3 - 1\right)(\xi-1)^2 = -1 + 2\xi - \xi^2 + \xi^3 - 2\xi^4 + \xi^5, \\ f_1(\xi) &= 3 - 4\xi + 4\xi^2 - 6\xi^3 + 4\xi^4, \\ f_2(\xi) &= -3 + 5\xi - 6\xi^2 + 6\xi^3, \\ f_3(\xi) &= 2 - 2\xi + 4\xi^2, \\ f_4(\xi) &= \xi, \end{aligned} \tag{3.64}$$

a wszystkie pozostałe $f_k(\xi) = 0$.

Równanie niezaburzone $f_0(\xi) = 0$ posiada interesujący nas pierwiastek rzeczywisty $x = 1$, który jest pierwiastkiem trzykrotnym. Rachunek zaburzeń będziemy więc prowadzić przyjmując $\nu = \mu^{\frac{1}{3}}$. Uwzględniając zaburzenia do drugiego rzędu włącznie przyjmiemy

$$\xi = 1 + \nu\Phi_1 + \nu^2\Phi_2 + O(\nu^3), \tag{3.65}$$

gdzie od początku wstawiamy $x = 1$, więc nie musimy traktować Φ_k jako funkcji i poprzestajemy na ich wartościach.

W myśl równań (3.38) i (3.39) otrzymamy Φ_1 i Φ_2 z równań

$$\nu^3\, g_3(\Phi_1) = 0, \qquad \nu^4\, g_4(\Phi_1, \Phi_2) = 0.$$

To znaczy, że podstawiając (3.65) do (3.63) możemy poprzestać na

$$f_0(1 + \nu\Phi_1 + \nu^2\Phi_2) + \nu^3 f_1(1 + \nu\Phi_1) = 0,$$

i rozwijając w szereg (w tym konkretnym przypadku wystarcza wymnożenie nawiasów i wzór na dwumian Newtona) dochodzimy do

$$g_0 = g_1 = g_2 = 0,$$

oraz

$$g_3 = 1 + 3\Phi_1^3, \tag{3.66}$$

$$g_4 = \Phi_1 \left(2 + 3\Phi_1^3 + 9\Phi_1\Phi_2\right). \tag{3.67}$$

Z warunku $g_3 = 0$ i równania (3.66) otrzymujemy

$$\Phi_1 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Podstawiając ten wynik do (3.67) dochodzimy do równania

$$1 - 3^{\frac{5}{3}}\Phi_2 = 0,$$

z rozwiązaniem

$$\Phi_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{3}}.$$

Jak widać, rachunek zaburzeń doprowadził nas do rozwiązania drugiego rzędu

$$\xi = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + O(\mu), \tag{3.68}$$

które zgadza się z podanym wcześniej „na wiarę" wzorem (2.23).

3.3 Rachunek zaburzeń pierwszego rzędu dla równań kanonicznych

Na rozwiązywanie równań metodą rachunku zaburzeń warto spojrzeć jako na zastosowanie przekształcenia zmiennej $y \to x$, które powoduje, że oryginalne równanie $f(y) = 0$ ulega uproszczeniu do postaci $g(x) = 0$, o znanym rozwiązaniu. Komplikacja zostaje przesunięta z równania do przekształcenia.

Tę sama ideę stosować można do równań różniczkowych, a równań ruchu w szczególności. Warunkiem jest, abyśmy mieli zagadnienie opisane układem zaburzonym

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{y}) + \varepsilon\, \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{y}, t), \tag{3.69}$$

dla którego potrafimy podać rozwiązanie układu niezaburzonego $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{y})$. Jeśli takim zagadnieniem niezaburzonym będzie zagadnienie dwóch ciał, to zauważmy, że najprościej posługiwać się równaniami dla uzmiennionych stałych (np. elementów keplerowskich lub zmiennych Delaunaya), gdyż te zawierać będa wyjątkowo proste równania niezaburzone ($\dot{a} = 0$ itp.)

Metoda Poincarégo – von Zeipela

Zajmiemy się teraz sytuacją, gdy ruch orbitalny pojedynczego ciała w zewnętrznym polu sił zadany jest funkcją Hamiltona

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{H}_0(\boldsymbol{v}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\boldsymbol{v}), \tag{3.70}$$

gdzie $\boldsymbol{v}$ oznacza zmienne kanoniczne, natomiast ε jest małym parametrem charakteryzującym siłę zaburzenia. Gdy mamy do czynienia z zaburzonym zagadnieniem względnym dwóch ciał, najwygodniej jest przyjąć zmienne Delaunaya

$$\boldsymbol{v} = (l, g, h, L, G, H)^{\mathrm{T}},$$

gdyż wtedy Hamiltonian niezaburzony ma najprostszą postać

$$\mathcal{H}_0(\boldsymbol{v}) = -\frac{\mu^2}{2\,L^2}. \tag{3.71}$$

Nadrzędną ideą rachunku zaburzeń w przypadku kanonicznym jest:

> znaleźć takie zmienne kanoniczne $\boldsymbol{v}'$, aby nowa funkcja Hamiltona $\mathcal{K}(\boldsymbol{v}')$ miała postać najprostszą z możliwych.

Z oczywistych względów musimy zastosować transformację kanoniczną, gdyż inaczej nie ma co mówić o nowej funkcji Hamiltona. Pierwsze zastosowania tego podejścia wiąża się z nazwiskami Delaunay i Poincaré. Stosowali oni transformacje z wykorzystaniem funkcji tworzącej zmiennych mieszanych. Obecnie, od końca lat sześćdziesiątych XX wieku, stosuje się raczej metody wykorzystujące transformacje Liego, ale ich zalety objawiają się w pełni dopiero na poziomie rachunku zaburzeń drugiego i wyższych rzędów. Dlatego też przedstawimy metodę Poincarégo (znaną czasem jako metoda von Zeipela) jako prostszą do wyjaśnienia.

Jak wiadomo, kanoniczna transformacja bliska identyczności może być zadana funkcją tworzącą typu F_2

$$F_2(l,g,h,L',G',H') = lL' + gG' + hH' - \varepsilon\Psi(l,g,h,L',G',H'), \qquad (3.72)$$

która zależy od pierwotnych (oskulacyjnych) kątów $l = M$ (anomalia średnia), g (argument perycentrum) i h (długość węzła wstępującego) oraz nowych pędów uogólnionych L', G', H'. Znak minus przy nieokreślonej jeszcze funkcji Ψ wprowadziliśmy ze względów „kosmetycznych" i nie jest on istotny. Zgodnie z definicją funkcji typu F_2 mamy

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\partial F_2}{\partial l} = L' - \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial l}, \qquad & l' &= \frac{\partial F_2}{\partial L'} = l - \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial L'},\\
G &= \frac{\partial F_2}{\partial g} = G' - \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial g}, \qquad & g' &= \frac{\partial F_2}{\partial G'} = g - \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial G'},\\
H &= \frac{\partial F_2}{\partial h} = H' - \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial h}, \qquad & h' &= \frac{\partial F_2}{\partial H'} = h - \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial H'},
\end{aligned} \qquad (3.73)$$

więc transformacja $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}'$ przechodzi w tożsamość dla $\varepsilon = 0$, natomiast dla **ograniczonej** funkcji Ψ różnica między zmiennymi będzie rzędu $O(\varepsilon)$.

Głównym problemem technicznym metody Poincarégo jest uwikłany charakter transformacji, ale na poziomie pierwszej potęgi ε nie jest to problem poważny.

Musimy teraz znaleźć taką funkcję Ψ, która pozwoli zrealizować zamierzony cel. Jeśli transformacja nie zależy jawnie od czasu, to nowa funkcja Hamiltona powstaje jako

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{v}') = \mathcal{H}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}')), \qquad (3.74)$$

a więc przez podstawienie wyrażenia starych zmiennych przy pomocy nowych. Tam, gdzie hamiltonian $\mathcal{H}$ zależał od pędu L, podstawiamy $L = L' - \varepsilon\Psi_l$ (pochodną cząstkową oznaczać będziemy jako dolny indeks) i podobnie $G = G' - \varepsilon\Psi_g$, $H = H' - \varepsilon\Psi_h$. Natomiast kąty l, g, h zostawimy na

razie bez zmian. A zatem

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}_0(L' - \varepsilon\Psi_l) + \varepsilon\mathcal{H}_1(l, g, h, L' - \varepsilon\Psi_l, G' - \varepsilon\Psi_g, H' - \varepsilon\Psi_h). \qquad (3.75)$$

Przypomnijmy teraz, że ograniczamy się do zaburzeń pierwszego rzędu, więc możemy przekształcić $\mathcal{K}(l, g, h, L', G', H')$ do postaci

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \mathcal{H}_0(L') - \varepsilon\,\Psi_l\,\frac{\partial\mathcal{H}_0(L')}{\partial L'} + \varepsilon\mathcal{H}_1(l, g, h, L', G', H') + O(\varepsilon^2) = \\
&= -\frac{\mu^2}{2(L')^2} + \varepsilon\left(-\frac{\mu^2}{(L')^3}\,\frac{\partial\Psi}{\partial l} + \mathcal{H}_1(l, g, h, L', G', H')\right) + O(\varepsilon^2) = \\
&= \mathcal{K}_0 + \varepsilon\mathcal{K}_1 + O(\varepsilon^2). \qquad (3.76)
\end{aligned}$$

Ostatni wiersz zawiera czysto umowne definicje: $\mathcal{K}$ podzielony będzie na niezaburzone $\mathcal{K}_0$ i zależny od pierwszej potęgi małego parametru wyraz $\varepsilon\mathcal{K}_1$.

Wybór $\mathcal{K}_0$ jest jednoznaczny:

$$\mathcal{K}_0(L') = -\frac{\mu^2}{2(L')^2} = -\frac{\mu}{2a'}. \qquad (3.77)$$

Tę drugą postać przytaczamy, żeby zasygnalizować, że można wprowadzić tzw. **elementy średnie** a', e', I', które powiązane są z nowymi pędami L', G', H' takimi samymi związkami, jak elementy oskulacyjne a, e, I z pędami L, G, H.

Będziemy także używać pojęcia **średniego ruchu średniego** zdefiniowanego jako

$$n' = \frac{\partial\mathcal{K}_0(L')}{\partial L'} = \frac{\mu^2}{(L')^3} = \sqrt{\frac{\mu}{(a')^3}}. \qquad (3.78)$$

Dochodzimy teraz do kluczowego momentu. Definicja $\mathcal{K}_1$ zawiera nieokreśloną jeszcze funkcję Ψ

$$\mathcal{K}_1 = -n'\,\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}l} + \mathcal{H}_1(l, g, h, L', G', H'), \qquad (3.79)$$

gdzie mogliśmy zstąpić pochodną cząstkową przez zupełną, gdyż tylko jedna zmienna l pojawiła się jako „czynna". Mamy teraz pozornie pełną swobodę wyboru $\mathcal{K}_1$, który zdefiniuje funkcję tworzącą Ψ, gdyż

$$\Psi = \frac{1}{n'}\int (\mathcal{H}_1 - \mathcal{K}_1)\,\mathrm{d}l. \qquad (3.80)$$

Rozpatrzmy formalnie najprostszy wybór, w którym $\mathcal{K}_1 = 0$, co by oznaczało, że ruch w nowych zmiennych będzie czysto keplerowski, bo z zaniedbanym $\mathcal{K}'$, otrzymamy $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$. Wygląda to atrakcyjnie, ale jakie ma konsekwencje dla Ψ ?

Funkcja $\mathcal{H}_1$ jest z punktu widzenia zależności od anomalii średniej sumą dwóch składników: wartości średniej $\langle\mathcal{H}_1\rangle_l$, która nie zależy od l, oraz części **czysto okresowej** $\tilde{\mathcal{H}}_1$, dla której $\langle\tilde{\mathcal{H}}_1\rangle_l = 0$. Wartość średnia, pozostawiona pod znakiem całki w równaniu (3.80), doprowadzi do powstania w Ψ składnika

$$\Psi^* = \frac{1}{n'}\int \langle\mathcal{H}_1\rangle_l \,\mathrm{d}l = \langle\mathcal{H}_1\rangle_l \,\frac{l}{n'} = \langle\mathcal{H}_1\rangle_l \, t, \tag{3.81}$$

który rośnie w sposób nieograniczony i staje się sprzeczny z założeniami transformacji bliskiej identyczności. Jesteśmy więc skazani na najprostszy **z możliwych** wybór

$$\mathcal{K}_1(-, g, h, L', G', H') = \left\langle \mathcal{H}_1(l, g, h, L', G', H')\right\rangle_l, \tag{3.82}$$

który prowadzi do ograniczonej, okresowej funkcji tworzącej

$$\Psi(l, g, h, L', G', H') = \frac{1}{n'}\int \tilde{\mathcal{H}}_1 \,\mathrm{d}l. \tag{3.83}$$

Otrzymaliśmy nowy Hamiltonian

$$\mathcal{K}(-, g, h, L', G', H') = -\frac{\mu^2}{2(L')^2} + \varepsilon\mathcal{K}_1(-, g, h, L', G', H') + O(\varepsilon^2),$$

który jeszcze nie nadaje się do generowania równań ruchu, gdyż zależy od zmiennych mieszanych. Ale różnica między $\varepsilon\mathcal{K}_1(-, g, h, L', G', H')$ a $\varepsilon\mathcal{K}_1(-, g', h', L', G', H')$ jest na poziomie ε^2, więc

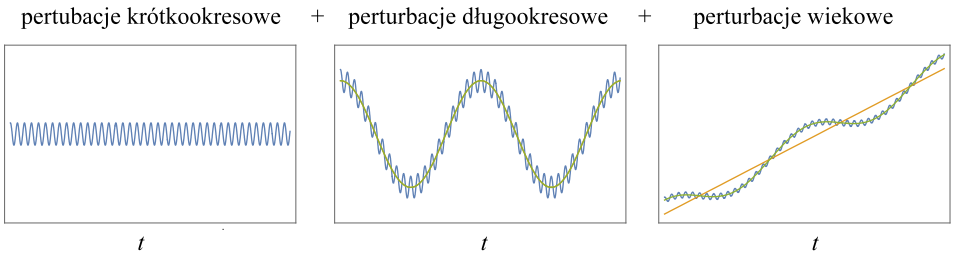
$$\mathcal{K}(-, g', h', L', G', H') = -\frac{\mu^2}{2(L')^2} + \varepsilon\mathcal{K}_1(-, g', h', L', G', H') + O(\varepsilon^2). \tag{3.84}$$

Z błędem rzędu $O(\varepsilon^2)$, nowy hamiltonian nie zależy od **średniej anomalii średniej** l', a więc powstała nowa, przybliżona całka ruchu

$$L' = \sqrt{\mu a'} = \text{const}, \tag{3.85}$$

czyli średnia półoś wielka a' jest również stała. Rzeczywiście, równania ruchu dla zmiennych średnich mają teraz postać

$$\begin{aligned} \dot{l}' &= n' + \varepsilon\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial L'}, \qquad & \dot{L}' &= -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial l'} = 0, \\ \dot{g}' &= \varepsilon\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial G'}, \qquad & \dot{G}' &= -\varepsilon\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial g'}, \\ \dot{h}' &= \varepsilon\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial H'}, \qquad & \dot{H}' &= -\varepsilon\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial h'}, \end{aligned} \tag{3.86}$$



Rysunek 3.1: Typy perturbacji w zagadnieniach grawitacyjnych. Perturbacje krótkookresowe mogą wystąpić we wszystkich zmiennych, długookresowe we wszystkich oprócz L, wiekowe tylko w kątach l, g, h.

przy czym ewolucję g', h', G', H' można badać niezależnie od l'. Zredukowaliśmy więc liczbę stopni swobody z 3 do 2 i nawet jeśli nowy układ nie daje sie rozwiązać w sposób ścisły, to g', h', G', H' są wolnozmienne, gdyż ich pochodne względem czasu są rzędu ε (por. prawe strony równań ruchu). Przy całkowaniu numerycznym pozwala to na stosowanie długiego kroku całkowania. Może się zdarzyć, że nowy hamiltonian posiada dodatkową całkę ruchu (np. nie zależy od h' lub g' ze względu na symetrię zagadnienia) i wtedy zagadnienie ruchu w zmiennych średnich daje sie rozwiązać w sposób jawny. Bywa też, choć rzadko, że nowy Hamiltonian w ogóle nie zależy od kątów, przez co zmienne średnie stają się zmiennymi kąt-działanie. Kąty g' i h' można też wyeliminować poprzez drugą transformację kanoniczną, ale to wymaga rachunku zburzeń drugiego rzędu podczas pierwszej transformacji.

Wróćmy do związków między zmiennymi średnimi a oskulacyjnymi. Wynikają one z równań (3.73), w których – z błędem rzedu $O(\varepsilon^2)$ – możemy zastępować w Ψ zmienne średnie oskulacyjnymi lub na odwrót. A zatem, wracając do (3.73), mamy

$$\begin{aligned} L &= L' - \varepsilon \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{v}')}{\partial l'} + O(\varepsilon^2), \\ l &= l' + \varepsilon \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{v}')}{\partial L'} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.87}$$

i podobnie dla pozostałych par zmiennych. Wyrazy z pochodnymi funkcji $\varepsilon\Psi$ nazywamy perturbacjami krótkookresowymi pierwszego rzędu (rys. 3.1). Nazwa wynika stąd, że mają ogólną postać wyrazów typu

$$A(L', G', H') \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (k_1 l' + k_2 g' + k_3 h'),$$

gdzie $k_1 \neq 0$, zaś okres takiego wyrazu jest porównywalny z ułamkiem $1/k_1$ okresu obiegu. Zmienne g', h', G', H', jako rozwiązanie uśrednionych równań ruchu, mogą zawierać perturbacje dwóch rodzajów:

- długookresowe typu $A(L')\binom{\sin}{\cos}\varepsilon\nu t$, (wszystkie cztery),
- wiekowe, typu $\varepsilon\nu\, t$ (tylko w g', h' oraz w l'),

przy czym częstotliwości ν są funkcjami pędów. Podkreślmy, że słowo „mogą" nie oznacza „muszą".

WYKŁAD 14

3.4 Rachunek zaburzeń dla równań Gaussa

Jeśli siła zaburzająca nie posiada potencjału i nie można odwołać się do formalizmu kanonicznego, to musimy użyć równań Gaussa. Załóżmy, że siła zaburzająca $\boldsymbol{P}$ z równań

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{P},$$

jest wielkością małą rzędu ε

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t). \tag{3.88}$$

Występujące w $\boldsymbol{Q}$ położenie i prędkość wyrażamy jako funkcje pięciu elementów oskulacyjnych i anomalii średniej (zmiennej)

$$\boldsymbol{y} = (\, a,\, e,\, I,\, \omega,\, \Omega,\, M\,)^{\mathrm{T}},$$

a wtedy równania Gaussa przyjmują postać typu (3.69), przy czym część niezaburzona prawych stron $\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{y})$ to wektor, którego wszystkie składowe prócz jednej są zerowe

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{I} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} F_{(a)} \\ F_{(e)} \\ F_{(I)} \\ F_{(\omega)} \\ F_{(\Omega)} \\ F_{(M)} \end{bmatrix}. \tag{3.89}$$

Składowe $F_{(a)}, \ldots, F_{(M)}$ wektora $\boldsymbol{F}_1$ to oczywiście prawe strony odpowiednich równań Gaussa z siłą zaburzającą $\boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{F}_1$.

Istnieją metody rachunku zaburzeń dla równań niekanonicznych oparte o tę samą zasadę, co metoda Poincarégo-von Zeipela, czyli o transformację bliską tożsamości. Ale są one bardziej złożone, gdyż nie mogą korzystać ze skalarnej funkcji tworzącej. Z tego względu zajmiemy się tylko najprostszą regułą znaną jako metoda uśredniania „nożycowego".

Załóżymy, że istnieje transformacja ze zmiennych oskulacyjnych $\boldsymbol{y}$ do zmiennych średnich $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = (\, a', \, e', \, I', \, \omega', \, \Omega', \, M' \,)^{\mathrm{T}},$$

w ogólnej postaci

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \varepsilon \, \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), \tag{3.90}$$

ale nie będziemy szukać konkretnej postaci perturbacji okresowych $\boldsymbol{X}$, a jedynie – przez analogię z przypadkiem kanonicznym – uznamy, że $\boldsymbol{X}$ są ograniczonymi funkcjami krótkookresowymi, gdy $\boldsymbol{x}$ spełnia uśrednione względem anomalii średniej równania Gaussa

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \, \langle \, \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}, t) \rangle, \tag{3.91}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} \dot{a}' \\ \dot{e}' \\ \dot{I}' \\ \dot{\omega}' \\ \dot{\Omega}' \\ \dot{M}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n' \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \langle F_{(a)} \rangle \\ \langle F_{(e)} \rangle \\ \langle F_{(I)} \rangle \\ \langle F_{(\omega)} \rangle \\ \langle F_{(\Omega)} \rangle \\ \langle F_{(M)} \rangle \end{bmatrix}. \tag{3.92}$$

Warto wiedzieć, że wszystkie zmienne średnie zawierać mogą zarówno perturbacje wiekowe typu const $\times \, t$ jak i długookresowe typu $\cos(\varepsilon \, t)$, na przykład w postaci $\cos \omega'$. Nie ma tu takich reguł jak w przypadku kanonicznym.

3.5 Zagadnienie dwóch ciał ze słabą siłą tarcia.

Spróbujmy otrzymać przybliżone rozwiązanie analityczne dla zagadnienia względnego dwóch ciał ze słabą siłą tarcia $\boldsymbol{P}$ styczną do prędkości

$$\boldsymbol{P} = -\varepsilon \, \boldsymbol{v}. \tag{3.93}$$

Jeśli $\varepsilon \ll 1$, to możemy posłużyć się metodą uśredniania.

Zaczynamy od wypisania równań Gaussa, podstawiając (3.93), czyli dla składowej stycznej, normalnej i binormalnej

$$S = -\varepsilon\, v, \quad N = B = 0.$$

Powstają równania znane z *Matematycznych podstaw mechaniki nieba* (rozdz. 1.5.9 i 1.6.1)

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= -\varepsilon\, \frac{2\, v^2}{n^2\, a}, \\
\dot{e} &= -\varepsilon\, \frac{2\, p}{r} \cos E, \\
\frac{dI}{dt} &= \dot{\Omega} \;=\; 0, \\
\dot{\omega} &= -\varepsilon\, \frac{2}{e}\, \sin f, \\
\dot{M} &= n - \varepsilon\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(1 + \frac{2\, r\, e^2}{p}\right) \sin f.
\end{aligned}$$

W równaniu dla $\dot{a}$ możemy uwzględnić całkę sił żywych i III prawo Keplera dla orbit eliptycznych

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \qquad n^2 a^3 = \mu,$$

co pozwala podstawić

$$v^2 = -\frac{\mu}{a} + \frac{2\,\mu}{r} = n^2\, a^2 \left(\frac{2\, a}{r} - 1\right),$$

i ostatecznie w równaniach typu (3.89) mamy

$$\begin{aligned}
F_{(a)} &= -2\, a \left(2\, \frac{a}{r} - 1\right), \\
F_{(e)} &= -\frac{2\, p}{r} \cos E, \\
F_{(I)} &= 0, \\
F_{(\omega)} &= -\frac{2}{e}\, \sin f, \\
F_{(\Omega)} &= 0, \\
F_{(M)} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(1 + \frac{2\, r\, e^2}{p}\right) \sin f.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Następnie uśredniamy prawe strony $\boldsymbol{F}$. Oprócz dwóch trywialnych przypadków $\langle 0 \rangle = 0$, mamy tu także dwie funkcje nieparzyste, więc

$$\langle F_{(I)} \rangle = \langle F_{(\omega)} \rangle = \langle F_{(\Omega)} \rangle = \langle F_{(M)} \rangle = 0.$$

Pozostałe dwie funkcje uśredniamy korzystając między innymi z wzoru (3.26) jak również z liniowości operacji uśredniania

$$\begin{aligned}
\left\langle F_{(a)} \right\rangle_M &= \left\langle -2\,a\,\left(2\,\frac{a}{r} - 1\right) \right\rangle_M = \left\langle -\frac{4\,a^2}{r} \right\rangle_M + \langle 2\,a \rangle_M = \\
&= -4\,a\,\left\langle \frac{a}{r} \right\rangle_M + 2\,a = -4\,a\,\left\langle \frac{a}{r}\,\frac{r}{a} \right\rangle_E + 2\,a = \\
&= -4\,a\,\langle 1 \rangle_E + 2\,a = -2\,a. \qquad (3.95) \\
\left\langle F_{(e)} \right\rangle_M &= \left\langle -\frac{2\,p}{r}\cos E \right\rangle_M = -\frac{2\,p}{a}\,\left\langle \frac{a\cos E}{r}\,\frac{r}{a} \right\rangle_E = \\
&= -\frac{2\,p}{a}\,\langle \cos E \rangle_E = 0. \qquad (3.96)
\end{aligned}$$

Jak widać, równania dla zmiennych średnich są bardzo proste i sprowadzają się do

$$\begin{aligned}
\dot{a}' &= -2\,\varepsilon\,a', \qquad (3.97) \\
\dot{e}' &= \dot{I}' = \dot{\omega}' = \dot{\Omega}' = 0, \qquad (3.98) \\
\dot{M}' &= n' = \sqrt{\frac{\mu}{(a')^3}}. \qquad (3.99)
\end{aligned}$$

Równania dla zmiennych średnich mogą zostać rozwiązane bez większego trudu. Równanie różniczkowe (3.97) można rozwiązać metodą separacji zmiennych; po sprowadzeniu do postaci

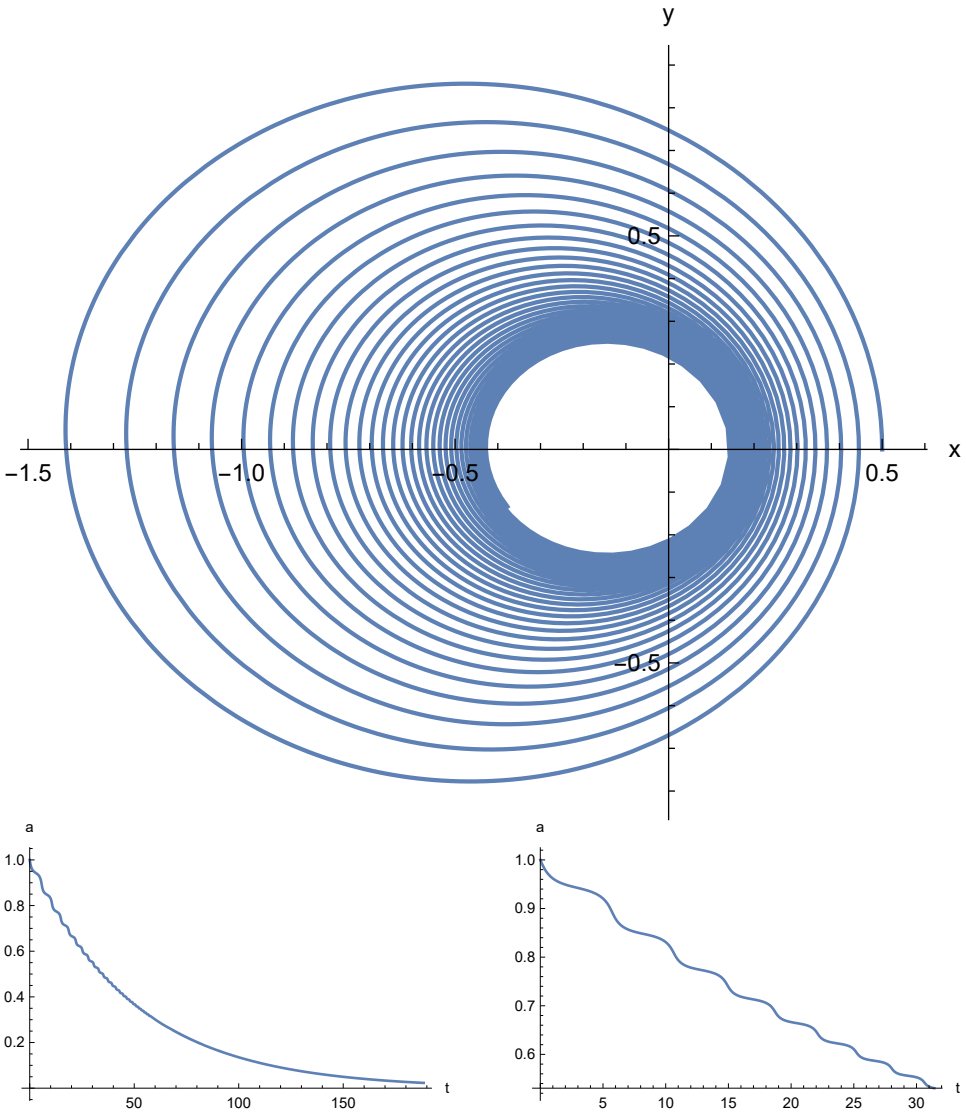
$$\frac{\mathrm{d}a'}{a'} = -2\,\varepsilon\,\mathrm{d}t,$$

i obustronnym całkowaniu dochodzimy do

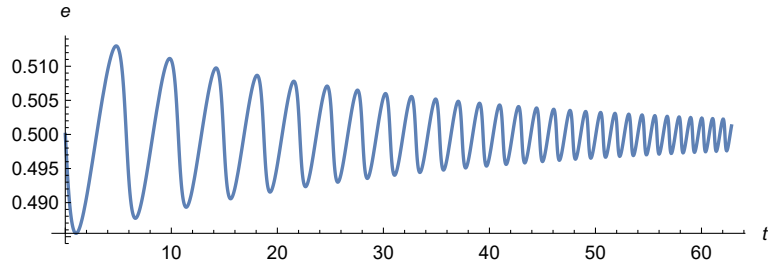
$$a' = a_0\,\exp\left[-2\,\varepsilon\,t\right], \qquad (3.100)$$

gdzie a_0 oznacza stałą całkowania – w tym wypadku jest to wartość **średniej półosi wielkiej** a' w epoce $t = 0$. Znając zależność $a'(t)$ możemy przejść do równania (3.99), które sprowadza się do prostej kwadratury

$$\begin{aligned}
\int_{M_0}^{M'} \mathrm{d}M' &= \int_0^t \sqrt{\frac{\mu}{(a')^3}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\mu}{(a_0)^3}}\,\int_0^t \left(\exp\left[-2\,\varepsilon\,t\right]\right)^{-3/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= n_0\,\int_0^t \exp\left[3\,\varepsilon\,t\right]\mathrm{d}t = \frac{n_0}{3\,\varepsilon}\left(\exp\left[3\,\varepsilon\,t\right] - 1\right).
\end{aligned}$$



Rysunek 3.2: Ruch keplerowski z liniowym oporem ośrodka, gdy $\varepsilon = 0.01$ i $\mu = 1$. U góry – trajektoria na płaszczyźnie (x, y) dla $0 \leqslant t \leqslant 20\pi$. U dołu – oskulacyjna półoś wielka dla $0 \leqslant t \leqslant 60\pi$ (po lewej) i $0 \leqslant t \leqslant 10\pi$ (po prawej).



Rysunek 3.3: Oskulacyjny mimośród w zagadnieniu z rys. 3.2 dla $0 \leqslant t \leqslant 20\pi$.

Przyjmując epokę $t = 0$ jako moment przejścia przez perycentrum, co odpowiada stałej dowolnej całkowania $M_0 = 0$, otrzymujemy rozwiązanie dla **średniej anomalii średniej**

$$M' \;=\; \frac{n_0}{3\,\varepsilon}\left(\exp\left[3\,\varepsilon\,t\right] - 1\right). \tag{3.101}$$

Wszystkie pozostałe równania dla elementów średnich są trywialne i mają rozwiązania w postaci stałych

$$e' = e_0, \quad I' = I_0, \quad \omega' = \omega_0, \quad \Omega' = \Omega_0. \tag{3.102}$$

Możemy teraz podsumować wiadomości na temat zachowania elementów średnich w zagadnieniu dwóch ciał z siłą tarcia (3.93). „Orbita średnia" ma stałą orientację w przestrzeni i stały mimośród, ale jej średnica (półoś wielka) maleje wykładniczo, dążąc asymptotycznie do zera (rys. 3.2). Zmiany w półosi wielkiej wpływają na ruch średni, a więc na prędkość zmian anomalii średniej M'. Średnia anomalia średnia rośnie wykładniczo, przy czym możemy sprawdzić, że na małych odcinkach czasu odstępstwa od III prawa Keplera są niewielkie. Używając przybliżenia $\exp c\,x \approx 1 + cx + c^2x^2/2 + \ldots$, możemy napisać

$$M' \;=\; \frac{n_0}{3\,\varepsilon}\left(1 + 3\,\varepsilon\,t + \frac{9}{2}\varepsilon^2 t^2 + \ldots - 1\right) \approx n_0\,t\left(1 + \tfrac{3}{2}\,\varepsilon\,t\right). \tag{3.103}$$

Dodajmy dla ścisłości, że właściwość $e' = \text{const}$ jest specyficzna dla siły $\boldsymbol{P} = -\varepsilon\,\boldsymbol{v}$; dla innych rodzajów siły tarcia (proporcjonalnej do v^2 albo z gęstością ośrodka zależną od r) mimośród średni również maleje wykładniczo. Pamiętajmy także, że w naszej analizie nie uwzględniliśmy efektów drugiego rzędu (proporcjonalnych do ε^2) dla zmiennych średnich. Tak więc, nawet jeśli

mimośród systematycznie maleje, to musi się to odbywać w tempie o wiele wolniejszym niż dla półosi wielkiej. Rysunek 3.3 nie wykazuje systematycznego trendu w mimośrodzie, który byłby zauważalny w skali kilkudziesięciu obiegów.

Perturbacje okresowe, które zauważalne są na przedstawionych wykresach, mają charakterystyczną cechę: ich okres systematycznie maleje, a amplituda zanika wykładniczo. Można to łatwo wytłumaczyć wyznaczając perturbacje krótkookresowe. Zróbmy to dla mimośrodu, przyjmując $e = e' + \varepsilon e_p$, gdzie e_p oznacza perturbacje okresowe. W ramach przybliżenia pierwszego rzędu możemy rozpatrzyć

$$\varepsilon \dot{e}_p = \dot{e} - \dot{e}' = -\varepsilon \frac{2p}{r} \cos E, \tag{3.104}$$

gdzie $\dot{e}' = 0$, zgodnie z równaniem (3.98). Całkując obie strony możemy nie tylko zastąpić zmienne oskulacyjne średnimi, ale również uznać, że zmienność $a'(t)$ wpłynie na całkę prawej strony w sposób zaniedbywalny ($\dot{a}' = O(\varepsilon)$, wieć wpływ będzie rzędu $O(\varepsilon^2)$). Przy takich założeniach

$$\begin{aligned} e_p &= -\int \frac{2p'}{r'} \cos E' \, dt = -\frac{2p'}{n'a'} \int \frac{a'}{r'} \cos E' \, dM' \\ &= -\frac{2p'}{n'a'} \int \frac{a'}{r'} \cos E' \, \frac{r'}{a'} \, dE' = -\frac{2p'}{n'a'} \sin E' \\ &= -2 \, \frac{1 - (e')^2}{n'} \sin E'. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Otrzymany wzór na perturbacje krótkookresowe w mimośrodzie powinienn być używany z uwzględnieniem ewolucji zmiennych średnich, a więc $n' = \sqrt{\mu/(a')^3}$ w mianowniku będzie wzrastać zgodnie z rozwiązaniem (3.100). Tak więc amplituda perturbacji okresowych systematycznie maleje, a ich okres się skraca, gdyż okres sinusa średniej anomalii mimośrodowej E' wynosi $2\pi/n'$. Podobne cechy wykazywać będą perturbacje okresowe w pozostałych elementach, to znaczy w półosi a, argumencie perycentrum ω i anomalii średniej M'.

Rozdział 4

Metody numeryczne mechaniki nieba

4.1 Klasyczne metody całkowania numerycznego

Przez całkowanie numeryczne rozumieć będziemy rozwiązywanie zagadnienia Cauchyego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu N (gdzie $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N$)

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t), \\ \boldsymbol{y}(t_0) &= \boldsymbol{y}_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

na interwale $t \in [t_0,\, t_1\,]$ zwanym **przedziałem całkowania**.

Jakkolwiek istnieją metody opracowane szczególnie dla równań dynamiki drugiego rzędu $\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$, to nie będziemy ich wprowadzać, gdyż albo używamy równań kanonicznych typu (4.1), albo możemy sprowadzić równania drugiego rzędu do postaci (4.1) w sposób przedstawiony w rozdziale 1.1 *Matematycznych podstaw mechaniki nieba.*

4.1.1 Metoda Eulera

Metoda Eulera jest w najprostszą z metod całkowania numerycznego i powstaje ona w sposób całkiem „naturalny". Załóżmy, że na krótkim odcinku czasu $t \in [t_0, t_0+h]$, gdzie h nazwiemy **krokiem całkowania**, możemy użyć pierwszych wyrazów szeregu Taylora

$$\boldsymbol{y}(t_0 + h) = \boldsymbol{y}_0 + h\ [\dot{\boldsymbol{y}}]_{t_0} + O(h^2).$$

Ponieważ $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}$, możemy przyjąć, że

$$\boldsymbol{y}(t_0 + h) \approx \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_0}, t_0). \tag{4.2}$$

Wzór ten definiuje jeden krok **metody Eulera** całkowania równań różniczkowych zwyczajnych, zwanej też krótko **integratorem Eulera**.

Przykład: Równania ruchu wahadła mają wektory

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} X \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Integrator Eulera dla tego układu zadany jest przez

$$x_1 = x_0 + h\,X_0, \qquad X_1 = X_0 - h \sin x_0.$$

Jeden krok metody Eulera obarczony jest **błędem lokalnym**, definiowanym jako różnica prawdziej wartości rozwiązania $\boldsymbol{y}(t_0 + h)$ i wyniku metody Eulera $\boldsymbol{y}_1$ otrzymanego przy użyciu wzoru (4.2)

$$||\boldsymbol{y}(t_0 + h) - \boldsymbol{y}_1|| = \delta_1 + \Delta,$$

w którego skład wchodzą

1. **błąd obcięcia**

   $$\delta_1 \propto h^2,$$

   wynikający z obcięcia szeregu Taylora, oraz

2. **błąd zaokrąglenia**

   $$\Delta \propto \varepsilon,$$

   wynikający z prowadzenia obliczeń przy użyciu skończonej ilości cyfr znaczących. Wielkość ε oznacza tu rząd wielkości odpowiadający ostatniej dokładnej cyfrze znaczącej obliczeń (typowo 10^{-14} dla ośmiobajtowych zmiennych komputera).

Metodę Eulera nazywamy metodą pierwszego rzędu, gdyż jej lokalny błąd obcięcia jest proporcjonalny do kwadratu długości kroku całkowania h. Każdą metodę numeryczną nazywamy metodą k-tego rzędu jeśli jej lokalny błąd obcięcia jest proporcjonalny do h^{k+1}.

Integrator Eulera możemy matematycznie potraktować jako funkcję, która danemu wektorowi początkowemu $\boldsymbol{y}_0$ przyporządkowuje nowy wektor $\boldsymbol{y}_1$,

$$\Phi_h : \quad \boldsymbol{y}_0 \to \boldsymbol{y}_1(y_0, h), \tag{4.3}$$

gdzie $\boldsymbol{y}_1$ jest zdefiniowane wzorem (4.2). Zapis ten ważny jest dla dowolnego integratora – nie tylko dla metody Eulera.

Zakładaliśmy dotąd, że krok całkowania h jest mały. Interwał całkowania H (całkowity przedział czasu, na którym chcemy znać wartości $\boldsymbol{y}$) jest zazwyczaj na tyle duży, że wymaga rozbicia na m podprzedziałów o mniejszej długości kroku całkowania. W praktyce, każdy integrator Φ_h stosowany jest rekurencyjnie. Załóżmy dla uproszczenia, że przedział całkowania H został podzielony na m **równych** części, tzn. $H = m\,h$. W takiej sytuacji przybliżenie dla $\boldsymbol{y}_m \approx \boldsymbol{y}(t_0 + H)$ otrzymujemy jako wynik m-krotnego złożenia integratora Eulera

$$\boldsymbol{y}_m = \Phi_h^m(\boldsymbol{y}_0) = \Phi_h(\ldots \Phi_h(\Phi_h(\boldsymbol{y}_0))\ldots).$$

Innymi słowy, tworzymy ciąg wartości

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{y}_0 + h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0, t_0),\\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{y}_1 + h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1, t_0 + h),\\
&\ldots\\
\boldsymbol{y}_m &= \boldsymbol{y}_{m-1} + h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_{m-1}, t_0 + (m-1)\,h).
\end{aligned}$$

Każdy krok integratora produkuje wartości $\boldsymbol{y}_k$ obarczone błędem lokalnym. Przyjmijmy jako oszacowanie, że błędy lokalne ulegają linowej akumulacji podczas całkowania. W takim razie, **błąd globalny** $E_m = ||\boldsymbol{y}(t_0+H) - \boldsymbol{y}_m||$ powinien być równy sumie m błędów lokalnych

$$E_m = m\,(\delta_1 + \Delta)\,.$$

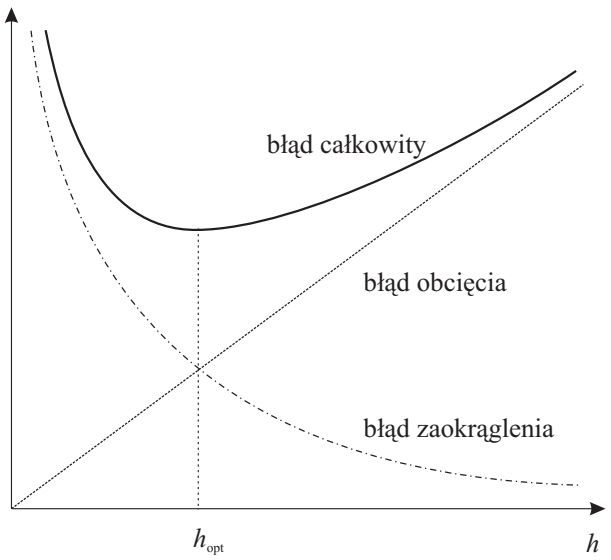
Niech $\delta_1 = \alpha_1\,h^2$, $\Delta = \alpha_2\,\varepsilon$; wtedy, po podstawieniu $m = H/h$, otrzymamy

$$E_m = H\,\left(\alpha_1\,h + \frac{\alpha_2\,\varepsilon}{h}\right). \tag{4.4}$$

Wzór ten przedstawia oszacowanie błędu globalnego pochodzącego z dwóch źródeł. Błąd obcięcia jest tym mniejszy, im mniejszy jest krok całkowania h. Nie można jednak skracać kroku całkowania bezkarnie, gdyż po przekroczeniu pewnej granicy zwanej krokiem optymalnym, dochodzi do głosu błąd zaokrąglenia (Rys. 4.1).

Zauważmy także, że globalny błąd obcięcia jest proporcjonalny do pierwszej potęgi h, a nie do potęgi drugiej. W ogólności, dla integratora k-tego rzędu błąd globalny będzie miał postać

$$E_m = H\,\left(\alpha_1\,h^k + \alpha_2\,\varepsilon/h\right).$$



Rysunek 4.1: Błąd globalny metody Eulera jako suma błędu obcięcia i błędu zaokrąglenia.

Wzór (4.4) jest dość bezlitosny: sugeruje on, że aby osiągnąć błąd globalny rzędu 10^{-9}, musimy podzielić interwał całkowania na miliard kroków h. Większej dokładności być może nie da się osiągnąć ze względu na błąd zaokrąglenia. Jak widać, metoda Eulera nie ma żadnego prawie znaczenia praktycznego; metody wyższego rzędu są niezbędne, gdyż tylko one pozwalają na użycie kroku nie krótszego niż optymalny dla uzyskania rozsądnej dokładności numerycznej.

Przykład: Stosujemy metodę Eulera do ruchu wahadła z warunkami początkowymi $x_0 = X_0 = 1$. Interwał całkowania $H = 0.4$ dzielimy na $m = 10$, 100 i 1000 kroków. Otrzymujemy błąd globalny we współrzędnej x równy odpowiednio $E_{10} = 8 \times 10^{-3}$, $E_{100} = 8 \times 10^{-4}$ i $E_{1000} = 8 \times 10^{-5}$. Jest on zdominowany przez błąd obcięcia, gdyż istotnie $E_m \propto h = H/m$. Gdyby jednak prowadzić rachunki z dokładnością czterech miejsc znaczących ($\varepsilon \approx 10^{-4}$), to odpowiednie wartości błędu globalnego wyniosą $E_{10} = 8 \times 10^{-3}$, $E_{100} = 9 \times 10^{-4}$ i $E_{1000} = 5 \times 10^{-3}$, co oznacza, że krok optymalny ma wartość

$$0.0004 < h_{\text{opt}} < 0.004.$$

Przy okazji zauważmy, że skoro $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) = (1, -0.841\ldots)^{\mathrm{T}}$, to krok $h < \varepsilon$ w ogóle nie zmieni wartości zmiennych, gdyż dodajemy wtedy do $\boldsymbol{y}_0$ przyrosty mniejsze niż błąd zaokrąglenia. Integrator Eulera będzie wtedy generował punkt stały $\boldsymbol{y}_{k+1} = \boldsymbol{y}_k$.

Używanie stałego kroku (równy podział H) bywa niewskazane gdy badamy ruch ciała z silnie zmienną predkością – na przykład na orbicie eliptycznej o dużym mimośrodzie. Wtedy w pobliżu perycentrum krok powinien być mały, żeby zredukować błąd obcięcia, a w pobliżu apocentrum – duży, żeby zredukować akumulację błędu zaokrąglenia i przyspieszyć rachunki. Znaczna część integratorów pozwala na automatyczną regulację kroku, żeby dopasować h do zadanego lokalnego błędu obcięcia.

W przedstawionej analizie błędu globalnego przyjęliśmy pesymistycznie, że lokalne błędy zaokrąglenia mają zawsze ten sam znak. Dirk Brouwer (1937) pokazał, że podejście statystyczne daje globalny błąd zaokrąglenia rzędu $\varepsilon\sqrt{H/h}$ lub $\varepsilon(H/h)^{\frac{3}{2}}$. W przypadku ruchu orbitalnego, ten drugi, gorszy przypadek dotyczy błędu w położeniu mierzonego wdłuż orbity.

4.1.2 Metody wyższego rzędu

Wobec niewystarczalności metody Eulera, posługujemy się w praktyce różnymi integratorami wyższego rzędu, które pozwalaja na użycie większego kroku całkowania h, gdyż mają większy krok optymalny. Zasadnicza linia podziału przebiega między metodami jednokrokowymi a wielokrokowymi.

Metody jednokrokowe

Ważniejsze typy **metod jednokrokowych** to metoda szeregów Taylora, metody ekstrapolacyjne, metody Rungego-Kutty i metody kolokacji.

1. **Metoda szeregów Taylora:** W metodzie tej używamy wielomianu Taylora, który włącza więcej wrazów niż metoda Eulera, ale dzieje się to kosztem postępującej komplikacji wzorów, gdyż wyraz $\boldsymbol{y}^{(k)}h^k/k!$ wymaga wyliczenia pochodnej z $\boldsymbol{f}$ rzędu $k-1$, co dla funkcji wektorowej wielu zmiennych bywa zmudne. Czasem jednak udaje się znaleźć względnie proste rekurencyjne wzory na kolejne współczynniki wielomianu Taylora. Mówimy wtedy o metodzie rekurecyjnych szeregów potęgowych. W takiej sytuacji integrator może mieć niemal dowolnie wysoki rząd i staje się najbardziej wydajną metodą całkowania. Niestety, możliwe jest to tylko dla względnie prostych prawych stron (np.

zagadnienie N ciał), a dodanie nowego oddziaływania wymusza wyprowadzanie wszystkich wzorów od nowa. Coraz częściej stosuje się wtedy algebrę komputerową (pakiety do rachunków symbolicznych) ze skryptami piszącymi programy dla takiego integratora w standardowych językach programowania.

Przykład: Dla wahadła mamy $\dot{x} = X, \dot{X} = -\sin x$, więc

$$\ddot{x} = \dot{X} = -\sin x, \qquad \ddot{X} = -\cos x\dot{x} = -X\cos x.$$

Wtedy wielomian Taylora drugiego stopnia definiuje integrator

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h\dot{x}_0 + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_0 \\ &= x_0 + hX_0 - \frac{h^2}{2}\sin x_0, \\ X_1 &= X_0 + h\dot{X}_0 + \frac{h^2}{2}\ddot{X}_0 \\ &= X_0 - h\sin x_0 - \frac{h^2}{2}X_0\cos x_0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Z definicji jest to metoda drugiego rzędu, z lokalnym błędem obcięcia $O(h^3)$.

2. **Metody ekstrapolacyjne:** Jest to bardzo ciekawa grupa metod, które pozwalają na obejście bariery kroku optymalnego. Wykorzystują one prostą metodę pierwszego lub drugiego rzędu do wygenerowani a kilku wartości $\boldsymbol{y}_1$. Na przykład, liczymy $\boldsymbol{y}_{1,h}$ z krokiem h, a potem, dla tych samych warunków początkowych wykonujemy dwa kroki całkowania o długości $h/2$, otrzymując inne, potencjalnie dokładniejsze $\boldsymbol{y}_{1,h/2}$ i tak dalej. Zatrzymujemy proces przed osiągnięciem kroku optymalnego i dopasowujemy wielomian lub funkcje wymierną do ciągu wartości $\boldsymbol{y}_{1,x}$. Ostatecznym wynikiem kroku całkowania h jest granica $\lim_{x\to 0}\boldsymbol{y}_{1,x}$. W astronomii najczęściej stosujemy metodę ekstrapolacyjną opracowaną przez Bulirscha i Stoera.

3. **Metody Rungego-Kutty:** W metodach Rungego-Kutty staramy się zastąpić wyższe pochodne z wielomianu Taylora kombinacją liniową wartości prawych stron $\boldsymbol{f}$ w odpowiednio dobranych punktach $t \in [t_0, t_0 + h]$ z przybliżonymi wartościami $\boldsymbol{y}(t)$. Metoda s-etapowa (RKs)

zdefiniowana jest przez tak zwaną tablicę Butchera

$$\begin{array}{c|c} c_i & a_{i,j} \\ \hline & b_j \end{array}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,s. \tag{4.6}$$

Tablica Butchera zawiera: s^2 współczynników $a_{i,j}$, s węzłów c_i, oraz s wag b_i. Elementy tablicy nie są niezależne, gdyż obowiązują dwa ograniczenia

$$\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} = c_i, \qquad \sum_{j=1}^{s} b_j = 1. \tag{4.7}$$

Jeśli znamy tablicę Butchera, to równania definiujące s-etapową metodę RK mają postać

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}_1 & = & \boldsymbol{y}_0 + h \sum_{n=1}^{s} b_n \boldsymbol{k}_n, \\ \boldsymbol{k}_n & = & \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{n,j} \boldsymbol{k}_j,\, t_0 + c_n h\right). \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Zauważmy, że metoda Eulera może być przedstawiona jako jednoetapowa metoda RK1 z tablicą

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

która prowadzi do (4.2). Z punktu widzenia warunków (4.7) jest to jedyna możliwa metoda z $s = 1$ (poza trywialną $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0$, z $a_{11} = c_1 = 0$).

Dla przykładu, dwuetapowa **metoda trapezów** ma tablicę Butchera

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a więc przyjmuje postać algorytmu

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{k}_1 & = & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0,\, t_0), \\ \boldsymbol{k}_2 & = & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0 + h\,\boldsymbol{k}_1,\, t_0 + h). \\ \boldsymbol{y}_1 & = & \boldsymbol{y}_0 + (h/2)\,(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)\,. \end{array} \tag{4.9}$$

i ma błąd obcięcia $O(h^3)$, czyli jest metodą drugiego rzędu. Jest ona wykorzystywana w integratorach ekstrapolacyjnych.

4. **Metody kolokacji:** Każda metoda kolokacji może być przekształcona do postaci RKs (ale nie na odwrót), więc nie będziemy poświęcać im szczególnej uwagi. Idea polega na konstruowaniu wielomianu przybliżającego $\boldsymbol{y}(t)$ na danym kroku całkowania,który jednak nie jest wielomianem Taylora, lecz ma zapewniać zgodność swojej pochodnej z prawymi stronami $\boldsymbol{f}$ wyliczanymi na odpowiednio dobranych węzłach $t \in [t_0, t_0 + h]$. Stąd też pokrewieństwo z metodami RK. W astronomii sporą karierę zrobiła metoda Radau-Everharta z wielomianem 8 stopnia, zapewniającym rząd 15 dzięki umiejętnemu wyborowi wezłów.

Metody wielokrokowe

Metody wielokrokowe wykorzystują informację o wartościach

$$\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-1},$$

do których dopasujemy wielomian zmiennej t i z niego otrzymujemy $\boldsymbol{y}_n$.

Przykład: Dwukrokowa metoda Adamsa-Bashfortha ma postać

$$\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}_{n-1} + \frac{h}{2}\left[3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_{n-1}, t_{n-1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_{n-2}, t_{n-2})\right],$$

gdzie $t_k = t_0 + k\,h$. Jej lokalny błąd obcięcia ma wielkość $O(h^3)$, więc metoda jest drugiego rzędu. Aby wystartować i obliczyć $\boldsymbol{y}_2$ potrzebujemy, oprócz warunków początkowych $\boldsymbol{y}_0$, również wartości dla $t = t_0 + h$, czyli $\boldsymbol{y}_1$. Te ostatnie nie muszą być dokładne – formalnie wystarcza, że są podane z błędem $O(h^3)$, więc mogą pochodzić z dowolnej metody jednokrokowej drugiego rzędu.

W zastosowaniu do wahadła z warunkami początkowymi $x_0 = X_0 = 1$ i krokiem $h = 0.01$, musimy najpierw wygenerować

$$x_1 = 1.0099578, \quad \text{oraz} \quad X_1 = 0.99155851.$$

Wartości te pochodzą z metody Taylora (4.5).

Następnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{h}{2}\left[3X_1 - X_0\right] = 1.01987, \\ X_2 &= X_1 - \frac{h}{2}\left[3\sin x_1 - \sin x_0\right] = 0.98309. \end{aligned}$$

W porównaniu z rozwiązaniem dokładnym mamy błędy

$$\delta_x \approx 2 \times 10^{-7},$$

oraz

$$\delta_X \approx 5 \times 10^{-7},$$

co wygląda na zgodne z oszacowaniem $O(h^3)$, ale pewności nabieramy dopiero wtedy, gdy zastosujemy krok o połowę krótszy i otrzymamy błąd mniejszy 8 razy, co rzeczywiście ma miejsce.

Jak łatwo zauważyć, metody te, choć szybkie i proste do zaprogramowania, mają dwa ograniczenia. Po pierwsze, w standardowych wariantach z prostymi wzorami wymagają stałego kroku h na całym przedziale całkowania. Po drugie zaś, wymagają do rozpoczęcia całkowania wygenerowania wartości $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-1}$ przy użyciu jakiejś metody jednokrokowej, czyli takiej, która wylicza $\boldsymbol{y}_n$ jedynie na podstawie $\boldsymbol{y}_{n-1}$.

4.2 Metody symplektyczne i inne metody dedykowane

Od kilkudziesięciu lat następuje burzliwy rozwój metod całkowania przystosowanych do szczególnych przypadków zagadnień mechaniki. Istnieją na przykład **metody geometryczne**, które z definicji zachowywać będa wartości pewnych całek ruchu lub więzów geometrycznych (na przykład długość całkowanego wektora jednostkowego). Położenia i pędy będą wtedy nadal obciążone błędem całkowania, ale ich funkcja będąca całką ruchu będzie stała, z dokładnościa do nieuniknionego błędu zaokrąglenia.

Ważne dla mechaniki nieba są **metody symplektyczne**. Są to metody, które z definicji generują przekształcenie kanoniczne zmiennych i można udowodnić, że otrzymana numerycznie trajektoria jest rozwiązaniem ścisłym kanonicznych równań ruchu z nieznacznie różniącą się od prawdziwej funkcją Hamiltona. W efekcie, prawdziwa funkcja Hamiltona (często jest to energia całkowita) wyliczana wzdłuż całkowanej numerycznie trajektorii nie wykazuje błędu systematycznie rosnącego, a jedynie oscylacje wokół wartości średniej, których amplituda zależy od kroku h. Własność tę mają niektóre metody RK (tzw. metody Gaussa-Legendre'a), metody łączące szereg Taylora z funkcją tworzącą transformacji kanonicznej, oraz tak zwane metody podziału.

Metody podziału (ang. splitting methods) wymagają, aby dla

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{f}_A(\boldsymbol{y}, t) + \boldsymbol{f}_B(\boldsymbol{y}, t),$$

znane było dokładne rozwiązanie analityczne dwóch osobnych zagadnień $\dot{\boldsymbol{y}}_A = \boldsymbol{f}_A(\boldsymbol{y}_A, t)$, oraz $\dot{\boldsymbol{y}}_B = \boldsymbol{f}_B(\boldsymbol{y}_B, t)$. Właściwe rozwiązanie otrzymujemy podążając na przemian wzdłuż $\boldsymbol{y}_A(t)$ oraz wzdłuż $\boldsymbol{y}_B(t)$ przez odpowiednio dobrane ułamki kroku h. Zauważmy, że jeśli rozwiązujemy w ten sposób równania kanoniczne

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{y}, \mathcal{H}\} = \boldsymbol{f},$$

gdzie $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B$, i przyjmiemy $\boldsymbol{f}_A = \{\boldsymbol{y}, \mathcal{H}_A\}$ oraz $\boldsymbol{f}_B = \{\boldsymbol{y}, \mathcal{H}_B\}$, to otrzymamy integrator symplektyczny, gdyż składać będziemy dwie transformacje kanoniczne.

Warto wiedzieć, że jeśli $||\boldsymbol{f}_B||/||\boldsymbol{f}_A|| = \varepsilon \ll 1$, to błąd obcięcia metody rzędu k będzie zawierał czynnik εh^{k+1}, a więc można przyjąć większy krok całkowania h niż w metodzie tradycyjnej.

Przykład: Hamiltonian wahadła można przedstawić jako sumę energii kinetycznej $\mathcal{H}_A = \frac{1}{2}X^2$ i potencjalnej $\mathcal{H}_B = -\cos x$. Energia kinetyczna generuje ruch z rozwiązaniem

$$x(t) = x_0 + X_0\,(t - t_0), \qquad X(t) = X_0, \tag{4.10}$$

natomiast energia potencjalna prowadzi do

$$x(t) = x_0, \qquad X(t) = X_0 - (t - t_0)\sin x_0. \tag{4.11}$$

Popularny integrator Stoermera-Verleta (znany jako *leapfrog*) składa te rozwiązania według schematu: pół kroku (4.10), cały krok (4.11) i kolejne pół kroku (4.10). Powstaje schemat

$$\begin{aligned} x^* &= x_0 + \frac{h}{2}X_0, \\ X_1 &= X_0 - h\sin x^*, \\ x_1 &= x^* + \frac{h}{2}X_1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Jest to metoda drugiego rzędu.

Dodatek A

Zagadnienie Hilla

A.1 Wstęp

Zagadnieniem Hilla nazywamy uproszczony wariant kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał rozpatrywanego w rozdziale 2.2. Przyjmijmy jako punkt wyjścia hamiltonian (2.4), w którym wprowadzimy parametr mas μ zdefiniowany wzorem (2.10), oraz skorzystamy z III prawa Keplera dla mas m_1 i m_2 podstawiając

$$k^2(m_1+m_2) = \Omega^2\Delta^3. \tag{A.1}$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\left(X_o^2+Y_o^2+Z_o^2\right)+\Omega(y_o\,X_o - x_o\,Y_o) \\ &\quad -\Omega^2\Delta^3\left[\frac{1-\mu}{r_1}-\frac{\mu}{r_2}\right], \end{aligned} \tag{A.2}$$

gdzie

$$r_1 = \sqrt{(x_o-x_1)^2+y_o^2+z_o^2}, \quad r_2 = \Delta\sqrt{(x_o-x_2)^2+y_o^2+z_o^2}, \tag{A.3}$$

$$x_1 = -\Delta\mu, \quad x_2 = \Delta(1-\mu), \tag{A.4}$$

zaś

$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}, \qquad 1-\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}, \qquad 0<\mu\leqslant\frac{1}{2}. \tag{A.5}$$

Indeks o pozwoli odróżnić oryginalne zmienne od tych, które wkrótce wprowadzimy.

George William Hill poszukiwał dobrego przybliżenia dla ruchu Księżyca, więc wprowadził do zagadnienia ograniczonego kołowego dwa postulaty:

H1: Stosunek mas μ jest mały, czyli $\mu \ll 1$.

H2: Badane ciało porusza się dostatecznie blisko masy m_2, czyli $r_2 \ll \Delta$.

Trzecim postulatem był ruch w płaszczyźnie $z = 0$, a więc zagadnienie płaskie, ale możemy go pominąć i rozpatrywać zagadnienie ogólniejsze.

A.2 Kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał w układzie związanym z masą m_2

Zanim skorzystamy z założeń Hilla, przeniesiemy środek układu współrzędnych z barycentrum mas m_1 i m_2 do samej masy m_2, przy czym pozostawać będziemy w obracającym się układzie współrzędnych. Przeniesienie środka dla współrzędnych jest proste i realizujemy je odejmując od współrzędnej x_o współrzedną x_2 masy m_2 czyli $\Delta(1-\mu)$, a pozostałe współrzędne pozostają bez zmian, co daje

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} = (x_o - \Delta(1-\mu), y_o, z_o)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{r}_o - \Delta\,(1-\mu, 0, 0)^{\mathrm{T}}. \quad \text{(A.6)}$$

Nie zapominajmy jednak, że pęd też musi być odniesiony do masy m_2. Musimy więc od pędu $\boldsymbol{R}_o$ odjąć pęd masy m_2. Ten ostatni znajdujemy sprawdzając jaki pęd musi mieć punkt o współrzędnych $\boldsymbol{r}_o = (x_2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, aby jego prędkość wynosiła $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{0}$, bo masa m_2 spoczywa w obracającym się układzie. Ponieważ

$$\dot{x}_o = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_o} = X_o + \Omega y_o, \quad \dot{y}_o = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y_o} = Y_o - \Omega x_o, \quad \dot{z}_o = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_o} = Z_o, \quad \text{(A.7)}$$

wystarczy podstawić $\dot{x}_o = \dot{y}_o = \dot{z}_o = 0$, oraz $x_o = x_2$, $y_o = z_o = 0$, by stwierdzić, że masa m_2 ma pęd $(0, \Omega x_2, 0)^{\mathrm{T}}$, więc nowe pędy będą zdefiniowane przez

$$\boldsymbol{R} = (X, Y, Z)^{\mathrm{T}} = (X_o, Y_o - \Omega x_2, Z_o)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_o - \Omega\Delta\,(0, 1-\mu, 0)^{\mathrm{T}}. \quad \text{(A.8)}$$

Transformacja

$$(\boldsymbol{r}_o, \boldsymbol{R}_o) \leftrightarrow (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}),$$

jest przekształceniem kanonicznym, gdyż stałe przesunięcia znikają przy różniczkowaniu i macierz Jacobiego tej transformacji jest jednostkowa (a więc symplektyczna). Ponieważ transformacja jest niezależna od czasu, nowy hamiltonian otrzymamy przez proste podstawienie przekształcenia do $\mathcal{H}$. Przyjmując $Y_0 = Y + \Omega\Delta(1-\mu)$, $x_o = x + \Delta(1-\mu)$, $r_2 = r$,

$$r_1^2 = (x + x_2 - x_1)^2 + y^2 + z^2 = (x+\Delta)^2 + y^2 + z^2 = \Delta^2 + 2\Delta x + r^2,$$

oraz $y_o = y$, $z_o = z$, $X_o = X$ i $Z_o = Z$, znajdujemy funkcję Hamiltona dla kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał w układzie związanym z masą m_2:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \frac{X^2}{2} + \frac{(Y + \Omega\Delta(1-\mu))^2}{2} + \frac{Z^2}{2} \\ &\quad +\Omega y\, X - \Omega\left(x + \Delta(1-\mu)\right)\left(Y + \Omega\Delta(1-\mu)\right) \\ &\quad -\Omega^2\Delta^3\left[\frac{1-\mu}{\sqrt{\Delta^2 + 2\Delta x + r^2}} + \frac{\mu}{r}\right]. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Po wykonaniu iloczynów mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} - \Omega\left(x\,Y - y\,X\right) \\ &\quad -\Omega^2\Delta^3\left[\frac{1-\mu}{\sqrt{\Delta^2 + 2\Delta x + r^2}} + \frac{\mu}{r}\right] \\ &\quad -\Omega^2\Delta(1-\mu)x - \frac{(\Omega\Delta(1-\mu))^2}{2}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

W ostatnim wierszu znalazł się na końcu wyraz stały, który nie zależy od zmiennych; można go odrzucić, gdyż choć zmienia wartość funkcji Hamiltona, to znika przy różniczkowaniu, a więc nie wpływa na równania ruchu.

A.3 Równania zagadnienia Hilla

Aby wprowadzić do zagadnienia postulaty Hilla musimy odpowiedzieć na zasadnicze pytanie: jeśli μ jest małym parametrem, jaką odległość od m_2 uznamy za małą ? Przyjmijmy, że jest to odległość r rzędu $\nu\Delta$, wprowadzając mały parametr powiązany z μ związkiem

$$\mu = \nu^\beta, \qquad \nu = \mu^{\frac{1}{\beta}}. \tag{A.11}$$

Nie wiemy jeszcze jaką wartość ma wykładnik β i znajdziemy ją w trakcie dalszych przekształceń (choć podpowiedź można by już teraz zaczerpnąć z położenia punktu Lagrange'a L_1 w kołowym zagadnieniu ograniczonym według wzoru (2.23)). Ważne tylko, żeby $\beta > 0$, jeśli ν ma być wielkością małą. W ten sposób postulaty Hilla przybierają formę: μ jest małym parametrem (H1), a stosunek r/Δ nie przekracza rzędu wielkości $\nu = \mu^{1/\beta}$ (H2).

Wprowadzimy teraz zmienne bezwymiarowe podobnie jak w rozdziale 2.2.3. Ale tym razem nową jednostką odległości będzie $\nu\Delta$ (więc w nowych jednostkach $\Delta = \nu^{-1}$), a nową jednostkę czasu dobierzemy tak, aby $k^2(m_1 + m_2) =$

ν^{-3}, co w świetle III prawa Keplera daje

$$\Omega = \sqrt{\frac{k^2(m_1+m_2)}{\Delta^3}} = 1.$$

Używając nowych jednostek możemy przepisać funkcję Hamiltona (A.10) w postaci powstającej z podstawienia $\Delta = 1/\nu$ i $\Omega = 1$, czyli

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \frac{X^2+Y^2+Z^2}{2} - x\,Y + y\,X - \frac{1-\mu}{\nu^2\sqrt{1+2\nu x+\nu^2 r^2}} - \frac{\mu}{\nu^3 r} \\ &\quad -\frac{(1-\mu)x}{\nu} - \frac{(1-\mu)^2}{2\nu^2}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Ostatni wyraz w pierwszym wierszu sugeruje przyjęcie

$$\mu = \nu^3, \quad \text{czyli} \quad \beta = \frac{1}{3}. \tag{A.13}$$

Ma to sens, gdyż wtedy ten wyraz, opisujący przyciąganie przez masę centralną m_2, nie będzie znikał ani nie będzie osobliwy w granicy $\nu \to 0$. Mamy wtedy

$$\mathcal{H}' = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{2} - x\,Y + y\,X - \frac{1}{r} - A, \tag{A.14}$$

gdzie

$$A = \frac{(1-\nu^3)}{\nu^2\sqrt{1+2\nu x+\nu^2 r^2}} + \frac{(1-\nu^3)}{\nu}x + \frac{(1-\nu^3)^2}{2\nu^2}. \tag{A.15}$$

Próbując rozwinąć A w szereg Maclaurina względem ν natrafimy na osobliwość, ale możemy wyciągnąć przed nawias czynnik ν^{-2} i rozwinąć

$$\begin{aligned}\nu^2 A &= \frac{(1-\nu^3)}{\sqrt{1+2\nu x+\nu^2 r^2}} + (1-\nu^3)\nu x + \frac{(1-\nu^3)^2}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2\nu x+\nu^2 r^2}} + \nu x + \frac{1}{2} + O(\nu^3) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3x^2-r^2}{2}\nu^2 + O(\nu^3). \end{aligned} \tag{A.16}$$

Po podzieleniu obu stron (A.16) przez ν^2, podstawieniu otrzymanego A do $\mathcal{H}'$, odrzuceniu wyrazu stałego $\frac{3}{2}\nu^{-2}$ (który jest osobliwy dla zerowego ν, ale nie wpływa na równania ruchu) i zaniedbaniu reszty rzędu $O(\nu)$, otrzymujemy hamiltonian zagadnienia Hilla

$$\mathcal{K} = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{2} - x\,Y + y\,X - \frac{1}{r} - \frac{2x^2-y^2-z^2}{2}. \tag{A.17}$$

Zauważmy, że o ile kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał zależało od jednego parametru μ, to zagadnienie Hilla nie zależy od żadnego parametru, co znacznie upraszcza jego analizę.

Z funkcji Hamiltona $\mathcal{K}$ wyprowadzamy równania ruchu dla zmiennych bezwymiarowych

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} = X + y, & \dot{X} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = Y + 2x - \frac{x}{r^3}, \\
\dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Y} = Y - x, & \dot{Y} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = -X - y - \frac{y}{r^3}, \\
\dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Z} = Z, & \dot{Z} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} = \quad - z - \frac{z}{r^3}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Aby przywrócić im jednostki konwencjonalne (astronomiczne lub SI), powinniśmy w ich rozwiązaniu każdą współrzędną pomnożyć przez $\Delta \sqrt[3]{\mu}$, a każdy pęd przez $\Omega \Delta \sqrt[3]{\mu}$. Ta reguła dotyczy rozwiązania, a nie samych równań ruchu, gdzie różne potęgi Ω zostały podstawione jako równe 1.

A.3.1 Analiza jakościowa zagadnienia

Całka Jacobiego

Ponieważ hamiltonian (A.17) nie zależy jawnie od czasu, jest on całką pierwszą układu (A.18). Przez analogię z kołowym zagadnieniem ograniczonym nazwiemy całką Jacobiego zarówno postać z pędami

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} - x\,Y + y\,X - \frac{1}{r} - \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2} = -\frac{c}{2}, \tag{A.19}$$

jak i postać z prędkościami

$$v^2 - 3x^2 + z^2 - \frac{2}{r} + c = 0, \tag{A.20}$$

gdzie $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Warto zauważyć, że w porównaniu z (2.6) brak wyrazu y^2, natomiast pojawił się kwadrat współrzędnej z. Jest to wynik połączenia sił bezwładności (odśrodkowej i Coriolisa) z przyciąganiem przez masę m_1.

Stałą Jacobiego zagadnienia Hilla oznaczyliśmy osobnym symbolem c, aby umożliwić porównanie ze stałą Jacobiego z kołowego zagadnienia ograniczonego C. Jeśli przyrównamy hamiltonian (A.12) do stałej $\mathcal{H}' = -C/2$, i prześledzimy dalsze przekształcenia, to stwierdzimy, że

$$C = \frac{3}{\mu^{\frac{2}{3}}} + c + O(\mu^{\frac{1}{3}}). \tag{A.21}$$

Jak widać, wartości $c = O(1)$ będą w istocie odpowiadać dużym wartościom stałej Jacobiego C, co wymuszało ruch wewnątrz powierzchni S_2 otaczającej masę m_2 z punktu widzenia kołowego ograniczonego zagadnienia trzech ciał (rozdział 2.2.4).

Całka Jacobiego (A.19) jest jedyną całką ruchu zagadnienia Hilla, więc zagadnienie to, mimo pozornej prostoty, należy do niecałkowalnych.

Powierzchnie zerowej prędkości

Analogicznie do rozdziału 2.2.4, zbadamy ograniczenia obszaru ruchu wynikające z faktu, ze $v^2 \geqslant 0$. Powierzchnie zerowej prędkości dane są równaniem

$$3x^2 - z^2 + \frac{2}{r} = c. \tag{A.22}$$

Zaczynając analizę od $c \gg 1$, mamy dwie możliwości:

1. ciało jest blisko masy m_2 i porusza się wewnątrz powierzchni S, która jest w przybliżeniu sferą o małym promieniu $r \approx 2c^{-1}$,

2. ciało jest daleko od masy m_2 i porusza się na zewnątrz powierzchni zbliżonej do walca hiperbolicznego W o równaniu $3x^2 - z^2 \approx c$, który posiada oś symetrii Oy, płaszczyznę symetrii $z = 0$ i nieskończoną rodzinę płaszczyzn symetrii $y = \text{const}$. Te ostatnie w przekroju dają hiperbole.

Drugi wariant jest czysto formalny, gdyż oddalając się na odległości $r \gg 1$ naruszamy założenia modelu, ale będzie pomocny w śledzeniu deformacji powstających gdy c maleje.

W miarę zmniejszania c, powierzchnia wewnętrzna S rośnie i wydłuża się wzdłuż osi x. W pierwszym przybliżeniu można ją uznać za elipsoidę obrotową.

cdn. (28.02.2021)

Punkty Lagrange'a

Dodatek B

Szereg Fouriera w postaci zespolonej

W rozdziale 3.1.1 nieco dziwnie może wyglądać pojawianie się czynnika $\frac{1}{2}$ przy wyrazie stałym i jego brak dla pozostałych współczynników. Nie jest także oczywiste, czemu całki we wzorach (3.2) dzielone są przez połowę okresu. Źródłem tej konwencji jest postać zespolona szeregu Fouriera, która ujawnia, że w gruncie rzeczy mamy do czynienia z szeregiem potęgowym.

Dla 2π-okresowej funkcji zespolonej $F(x)$ zmiennej rzeczywistej x, suma zespolonego szereg Fouriera ma postać

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(ikx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k [\exp(ix)]^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k, \qquad \text{(B.1)}$$

a więc jest sumą szeregu potęgowego (Laurenta) zmiennej $\zeta = \exp(ix)$. Współczynniki tego szeregu są liczbami zespolonymi zdefiniowanymi przez

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \exp(-ikx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, \bar{\zeta}^k\, dx. \qquad \text{(B.2)}$$

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją rzeczywistą, to współczynniki a_k mają specyficzną postać. Według wzoru Eulera

$$\exp(\pm ikx) = \cos kx \pm i \sin kx, \qquad \text{(B.3)}$$

więc

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(x) \cos kx - iF(x) \sin kx]\, dx = A_k + iB_k, \qquad \text{(B.4)}$$

gdzie

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx, \qquad B_k = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\,dx. \tag{B.5}$$

Z parzystości funkcji trygonometrycznych wynika, że

$$A_{-k} = A_k, \qquad B_{-k} = -B_k, \quad \Rightarrow \quad a_{-k} = \bar{a}_k, \tag{B.6}$$

z prostym wnioskiem, że $B_0 = 0$, więc $a_0 = A_0$ jest liczbą rzeczywistą.

Jeśli teraz rozbijemy sumę (B.1) na trzy części, to możemy napisać

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ikx) + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \exp(ikx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \exp(ikx) + a_{-k}\exp(-ikx)\right] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k + iB_k)(\cos kx + i\sin kx)\right. \\ &\qquad \left. +(A_k - iB_k)(\cos kx - i\sin kx)\right]. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Po wymnożeniu nawiasów w (B.7) stwierdzamy, że część urojona znika i zostaje

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2A_k\cos kx - 2B_k \sin kx\right). \tag{B.8}$$

Porównanie z postacią (3.1), czyli

$$F(x) = \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k\cos kx + s_k \sin kx\right),$$

prowadzi do wniosku, że

$$c_0 = 2A_0, \qquad c_k = 2A_k = a_{-k} + a_k, \qquad s_k = -2B_k = a_{-k} - a_k, \tag{B.9}$$

co wyjaśnia zarówno pojawienie się czynnika $\frac{1}{2}$ przy wyrazie stałym, jak i czynnik $1/\pi = 2/(2\pi)$ w całkach (3.2).

Dodatek C

Efekt Starka

Jako ilustrację kanonicznego rachunku zaburzeń rozpatrzymy ciekawe zagadnienie, analizowane jeszcze przez Lagrange'a a spopularyzowane w fizyce dzięki pracom doświadczalnym J. Starka nad widmami atomów w polu elektrycznym. Chodzi o zagadnienie dwóch ciał z zaburzeniem w postaci stałej siły. Przyjmiemy układ współrzędnych, w którym siła ta jest skierowana wzdłuż osi Oz. Co ciekawe, zagadnienie to posiada ścisłe rozwiązanie, ale my zajmiemy się przypadkiem słabego zaburzenia i użyjemy metody Poincarégo-von Zeipela. Mamy wtedy $\mathcal{H}_0 = -\mu^2/(2L^2)$, oraz

$$\varepsilon\mathcal{H}_1 = -\varepsilon z = -\varepsilon r \sin I \sin(f+\omega). \tag{C.1}$$

Jak widać, zagadnienie ma już dwie całki pierwsze:

- zachowana jest energia całkowita $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1$, gdyż

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0,$$

- zachowany jest rzut momentu pędu na oś Oz, gdyż

$$\dot{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Omega} = 0.$$

Wprowadzamy zmienne średnie, dzięki którym hamiltonian upraszcza się do $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \varepsilon\mathcal{K}_1$, gdzie

$$\mathcal{K}_1 = -\left\langle r' \sin I' \sin(f'+\omega') \right\rangle = \frac{3}{2}\, a'e' \sin I' \sin\omega'. \tag{C.2}$$

Wartość średnią $\langle z\rangle$ otrzymaliśmy stosując regułę (3.26), czyli

$$\begin{aligned}
\langle z\rangle &= \sin I\langle r\sin(f+\omega)\rangle,\\
\langle r\sin(f+\omega)\rangle &= \langle r\sin f\rangle\cos\omega + \langle r\cos f\rangle\sin\omega,\\
\langle r\sin f\rangle &= 0,\\
\langle r\cos f\rangle &= a\langle\cos E - e\rangle = a\langle\cos E\rangle - ae,\\
\langle\cos E\rangle_M &= \langle\cos E - e\cos^2 E\rangle_E = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

Jeśli wyrazimy $\mathcal{K}_1$ w zmiennych Delaunaya, to przybiera on postać

$$\mathcal{K}_1 = \frac{3L'}{2\mu G'}\sqrt{(L'^2-G'^2)(G'^2-H'^2)}\sin g'. \tag{C.3}$$

Ponieważ jedynym kątem jest tu g', to przekształcone zagadnienie jest z dokładnością $O(\varepsilon^2)$ całkowalne jako układ z jednym stopniem swobody (L' i H' sa w nim stałymi).

cdn. (28.02.2021)

Spis treści

1 Zagadnienie N ciał **1**

1.1 Sformułowanie zagadnienia w dowolnym układzie inercjalnym 1

1.2 Całki ruchu zagadnienia N ciał 3

1.2.1 Całka sił żywych (energii) 4

1.2.2 Całki środka masy (barycentrum) 4

1.2.3 Całki momentu pędu (pól) 5

1.3 Niecałkowalność zagadnienia N ciał 6

1.4 Ważniejsze typy równań ruchu stosowane w zagadnieniu N ciał 7

1.4.1 Płaszczyzna niezmiennicza i zmienne barycentryczne . 7

1.4.2 Klasyczne równania ruchu względnego 9

1.4.3 Kanoniczne równania ruchu względnego – zmienne Poincarégo 12

1.4.4 Kanoniczne równania ruchu względnego - zmienne Jacobiego 18

1.5 Moment bezwładności układu N ciał 21

2 Zagadnienie trzech ciał **24**

2.1 Równania ruchu i rozwiązania homograficzne Lagrange'a . . . 24

2.2 Kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał 29

2.2.1 Całka Jacobiego 31

2.2.2 Kryterium Tisseranda 32

2.2.3 Zmienne bezwymiarowe 34

2.2.4 Powierzchnie i krzywe zerowej prędkości 37

2.2.5 Położenie punktów libracyjnych Lagrange'a 48

2.2.6 Stabilność punktów libracyjnych Lagrange'a 53

2.3 Rozwiązania Lagrange'a w Układzie Słonecznym, orbity halo 62

3 Metody analityczne mechaniki nieba **65**

3.1 Szeregi Fouriera anomalii średniej 66

3.1.1 Szereg Fouriera 66
3.1.2 Funkcje Bessela i inne funkcje specjalne 67
3.1.3 Wartości średnie w ruchu keplerowskim 71
3.2 Rachunek zaburzeń dla równań algebraicznych i przestępnych 73
3.2.1 Podstawy 73
3.2.2 Przykład: Trójmian kwadratowy – pierwiastek pojedynczy 76
3.2.3 Przykład: Trójmian kwadratowy – pierwiastek podwójny 78
3.2.4 Przykład: Równanie Keplera 79
3.2.5 Przykład: Położenie punktu Lagrange'a L_1 80
3.3 Rachunek zaburzeń pierwszego rzędu dla równań kanonicznych 82
3.4 Rachunek zaburzeń dla równań Gaussa 87
3.5 Zagadnienie dwóch ciał ze słabą siłą tarcia. 88

4 Metody numeryczne mechaniki nieba 94
4.1 Klasyczne metody całkowania numerycznego 94
4.1.1 Metoda Eulera 94
4.1.2 Metody wyższego rzędu 98
4.2 Metody symplektyczne i inne metody dedykowane 102

A Zagadnienie Hilla 104
A.1 Wstęp 104
A.2 Kołowe ograniczone zagadnienie trzech ciał w układzie związanym z masą m_2 105
A.3 Równania zagadnienia Hilla 106
A.3.1 Analiza jakościowa zagadnienia 108

B Szereg Fouriera w postaci zespolonej 110

C Efekt Starka 112