Mechanika nieba 2006/7.
Pytania egzaminacyjne I.

1. Przedstaw metodę uzmienniania stałych dla zagadnienia

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v},\\ \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

   Wyprowadź równania ewolucji stałych dowolnych $\boldsymbol{C}$ w postaci

$$\dot{\boldsymbol{C}} = \mathcal{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{F}_1\end{pmatrix}.$$

2. Co to są elementy oskulacyjne ? Dla zagadnienia

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{P},$$

   wyprowadź równanie

$$\dot{a} = \frac{2\,a^2}{\mu}\,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}.$$

3. Podaj wzory na składowe siły zaburzającej $\boldsymbol{P}$ w dwóch klasycznych bazach związanych z wektorami położenia i prędkości.

4. Wyprowadź ogólne równania dla zmian wektorów momentu pędu ($\dot{\boldsymbol{G}}$) i Laplace'a ($\dot{\boldsymbol{e}}$) przy dowolnej sile zaburzającej $\boldsymbol{P}$.

5. Wymień ograniczenia w stosowaniu równań Gaussa (3–8), wyjaśnij pochodzenie „osobliwości” i krótko opisz jak im zaradzić.

6. Wypisz równania Gaussa (3–4) i (6–8) gdy $\boldsymbol{P}$ jest siłą tarcia styczną do orbity i $\boldsymbol{P} = -\gamma^2\,\boldsymbol{v}$. Jakie wnioski na temat ruchu w tym zagadnieniu można wysnuć bez rozwiązywania równań ?

7. Manewr zmiany nachylenia w świetle równań Gaussa.

8. Zestaw i porównaj podstawowe pojęcia i ograniczenia formalizmów Newtona, Lagrange'a i Hamiltona.

9. Zbadaj ruch w potencjale radialnym z funkcją Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\cos\varphi)^2\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r), \tag{1}$$

   wypisując równania ruchu i wyprowadzając z nich główne wnioski jakościowe.

10. Co to jest transformacja Legendre'a ? Wykonaj ją dla zagadnienia wahadła z lagranżjanem

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \omega_0^2 \cos\varphi.$$

11. Macierze symplektyczne – definicja, właściwości i ich rola w formalizmie kanonicznym.

12. Nawiasy Poissona – definicja, właściwości i zastosowania.

13. Co to jest transformacja kanoniczna ? Wymień ważniejsze typy transformacji kanonicznych oraz związane z nimi kryteria kanoniczności.

14. Podaj definicje zmiennych Hilla-Whittakera i Delaunaya. Jak wygląda ruch keplerowski w tych zmiennych ? Co to znaczy, że zmienne Delaunaya są zmiennymi „działanie-kąt" w zagadnieniu dwóch ciał ?

15. Transformacja do układu jednostajnie obracającego się jako transformacja punktowa.

16. Czym różni się klasyczna funkcja tworząca transformacji kanonicznej od funkcji tworzącej typu Liego ? Porównaj opis transformacji tożsamościowej przy użyciu obu rodzajów funkcji.

17. Wyprowadź dwa dowolnie wybrane spośród „równań planetarnych Lagrange'a" dla zaburzającego potencjału $V_1(a, e, I, M, \omega, \Omega)$.

18. Sformułuj zagadnienie N ciał i wymień jego całki ruchu. Czy zachodzi sprzeczność między ich liczbą a faktem całkowalności zagadnienia dwóch ciał ?

19. Wyprowadź całkę pól w zagadnieniu N ciał korzystając z hamiltonianu

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{R}_i^2}{2\,m_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}. \tag{2}$$

    Co to jest płaszczyzna niezmiennicza (Laplace'a) i do czego jest wykorzystywana ?

20. Zdefiniuj kanoniczne zmienne względne Poincarégo.

21. Wyjaśnij symbole występujące w podanym niżej twierdzeniu o wiriale

$$\ddot{I} = 4\,T + 2\,V_N = 4\,E - 2\,V_N.$$

Jak ma się ten wzór do problemu stabilności strukturalnej układu N ciał ? Podaj uśredniony wariant tego twierdzenia.

Dodatek: Równania Gaussa

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2\,a^2}{\mu}\,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{2}{n\,\sqrt{1-e^2}}\left[R\,e\,\sin f + T\,\frac{p}{r}\right] = \frac{2\,v}{n^2\,a}\,S, && (3)\\
\dot{e} &= \frac{1}{\mu\,a\,e}\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{r} + (a\,p - r^2)\,\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{P} \\
&= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a}\,[R\,\sin f + T\,(\cos f + \cos E)] \\
&= \frac{1}{v}\left[S\,\frac{2\,p}{r}\cos E + N\,\sqrt{1-e^2}\,\sin E\right], && (4)\\
\frac{dI}{dt} &= \frac{r\,\cos(f+\omega)}{\mu\,p}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{P} = \frac{r\,\cos(f+\omega)}{\sqrt{\mu\,p}}\,B, && (5)\\
\dot{M} &= n - \frac{2}{\sqrt{\mu\,a}}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P} - \sqrt{1-e^2}\,(\dot{\omega} + c\,\dot{\Omega}) \\
&= n - \frac{1}{e\,\sqrt{\mu\,a}}\,[\,R\,(2\,r\,e - p\,\cos f) + T\,p\,\sin f\,] \\
&= n - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\,v}\left[S\,\sin f\left(1 + \frac{2\,r}{p}\,e^2\right) + N\,(e - \cos f)\right], && (6)\\
\dot{\omega} &= -\frac{r}{\mu\,p\,e}\left[\frac{\sqrt{\mu\,p}}{r}\,(\cos E + e)\,\boldsymbol{r} - (p+r)\sin f\,\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{P} - c\dot{\Omega} \\
&= \frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-R\,\cos f + T\,\left(1 + \frac{r}{p}\right)\,\sin f\right] - c\dot{\Omega} \\
&= \frac{1}{e\,v}\,[2\,S\,\sin f - N\,(e + \cos E)] - c\,\dot{\Omega}, && (7)\\
\dot{\Omega} &= \frac{r\,\sin(f+\omega)}{s\,\mu\,p}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{P} = \frac{r\,\sin(f+\omega)}{s\,\sqrt{\mu\,p}}\,B, && (8)
\end{aligned}$$

gdzie $s = \sin I$, $c = \cos I$, $p = a\,(1-e^2)$, $n = \sqrt{\mu\,a^{-3}}$.