Przykład 1.2 – Uzmiennianie stałych dla małych drgań wahadła matematycznego

Wahadło matematyczne jest układem o jednym stopniu swobody a więc zamiast wektorów $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{v}$ mamy po prostu $\boldsymbol{r} = \varphi$ i $\boldsymbol{v} = \dot{\varphi} = \Phi$. Rozwińmy prawą stronę równania (1.9) w szereg potęgowy z dokładnością do $O(\varphi^4)$, korzystając z wzoru MacLaurina

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + O(\varphi^5).$$

Równania ruchu (1.10)/(1.15) uproszczone przez odrzucenie wyrazów rzędu $O(\varphi^5)$, przyjmą postać

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \Phi, \\ \dot{\Phi} &= F_0(\varphi) + F_1(\varphi), \end{aligned} \tag{1.26}$$

gdzie

$$F_0(\varphi) = -\omega_0^2\,\varphi, \qquad F_1(\varphi) = \tfrac{1}{6}\,\omega_0^2\,\varphi^3. \tag{1.27}$$

Wiemy, że rozwiązanie (1.12) układu z siłą F_0 – czyli oscylatora harmonicznego – ma postać

$$\begin{aligned} \varphi_0(\boldsymbol{C}, t) &= A\,\sin(\omega_0\,t + \chi), \\ \Phi_0(\boldsymbol{C}, t) &= A\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t + \chi), \end{aligned} \tag{1.28}$$

zależną od dwóch stałych dowolnych

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \chi \\ A \end{pmatrix}.$$

Odwrócenie równań (1.28) daje nam związki

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\Phi_0^2}{\omega_0^2}}, \tag{1.29}$$

$$\chi = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\omega_0\,\varphi_0}{\Phi_0}\right] - \omega_0\,t. \tag{1.30}$$

Istota metody uzmienniania stałych polega na założeniu, że wzory (1.28)–(1.30) obowiązują również dla *zmiennych* $A(t), \chi(t)$, jeśli φ_0 i Φ_0 zastąpimy rozwiązaniem φ, Φ pełnego układu (1.26) a więc (por. (1.16) i (1.17))

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{C}(t),t) &= A(t)\,\sin(\omega_0\,t+\chi(t)), \\ \Phi(\boldsymbol{C}(t),t) &= A(t)\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t+\chi(t)), \\ A(t) &= \sqrt{\varphi^2+\frac{\Phi^2}{\omega_0^2}}, \\ \chi(t) &= \text{arc tg}\left[\frac{\omega_0\,\varphi}{\Phi}\right]-\omega_0\,t. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Sformułowanie równań (1.23) wymaga znajomości pochodnych

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\chi}=A\,\cos(\omega_0\,t+\chi), \qquad \frac{\partial\varphi_0}{\partial A}=\sin(\omega_0\,t+\chi),$$
$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\chi}=-A\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t+\chi), \qquad \frac{\partial\Phi_0}{\partial A}=\omega_0\,\cos(\omega_0\,t+\chi),$$

które tworzą macierz $\mathbf{A}$. Mamy więc

$$\begin{bmatrix} A\,\cos(\omega_0\,t+\chi), & \sin(\omega_0\,t+\chi) \\ -A\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t+\chi), & \omega_0\,\cos(\omega_0\,t+\chi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\chi}\\ \dot{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ F_1(A,\chi,t)\end{bmatrix}.$$

Przejście od powyższych równań typu (1.23) do postaci typu (1.25) jest elementarne. Można tu zastosować metodę Cramera albo dowolny inny sposób i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix}\dot{\chi}\\ \dot{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{F_1}{A\,\omega_0}\sin(\omega_0\,t+\chi) \\ \frac{F_1}{\omega_0}\,\cos(\omega_0\,t+\chi)\end{bmatrix}. \tag{1.32}$$

Niestety, czeka nas jeszcze jeden etap: musimy podstawić do (1.32) wyrażenie dla F_1 jako funkcji czasu i zmiennych oskulacyjnych χ, A. Nie jest to zadanie skomplikowane, gdyż w świetle (1.27) i (1.28)

$$F_1(\chi,A,t)=\tfrac{1}{6}\,A^3\,\omega_0^2\,\sin^3(\omega_0\,t+\chi). \tag{1.33}$$

Wystarczy już tylko podstawić (1.33) do prawych stron (1.32) a następnie przejść od iloczynów i potęg sinusa i cosinusa do postaci wielomianów trygonometrycznych. Wykorzystamy przy tym

$$(\sin y)^4=\frac{1}{8}\,(\,3-4\,\cos(2\,y)+\cos(4\,y))\,,$$

oraz

$$\cos y\,(\sin y)^3=\frac{1}{8}\,(\,2\,\sin(2\,y)-\sin(4\,y))\,.$$

W ten sposób otrzymujemy końcową postać równań ruchu typu (1.25) dla małych drgań wahadła w zmiennych oskulacyjnych

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A^2\,\omega_0\left[-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{12}\cos 2\psi-\tfrac{1}{48}\cos 4\psi\right], \\ \dot{A} &= A^3\,\omega_0\left[\tfrac{1}{24}\sin 2\psi-\tfrac{1}{48}\sin 4\psi\right], \end{aligned} \tag{1.34}$$

gdzie symbol ψ oznacza

$$\psi = \omega_0\, t + \chi.$$