

**Sławomir Breiter**  
Obserwatorium Astronomiczne UAM

*Wstęp do mechaniki nieba*

II r. Astron. (pierwszy stopień)  
wersja 23.01.2013

# Rozdział 1

## Zagadnienie dwóch ciał – wiadomości wstępne

Mechanika nieba jest nauką o ruchu naturalnych i sztucznych ciał niebieskich. Najważniejszą z sił decydujących o ruchu tych ciał jest zazwyczaj siła grawitacji. Gdyby przyjąć w uproszczeniu, że ciała niebieskie mają formę punktów materialnych i siła grawitacji jest jedyną siłą, to najprostszym nietrywialnym zagadnieniem mechaniki nieba staje się problem ruchu dwóch ciał niebieskich czyli **zagadnienie dwóch ciał**. Zagadnienie to, rozwiązane przez Isaaca Newtona w XVII wieku, stanowi klucz do mechaniki nieba.

### 1.1 Prawo grawitacji

Zacznijmy od przypomnienia prawa powszechnej grawitacji:

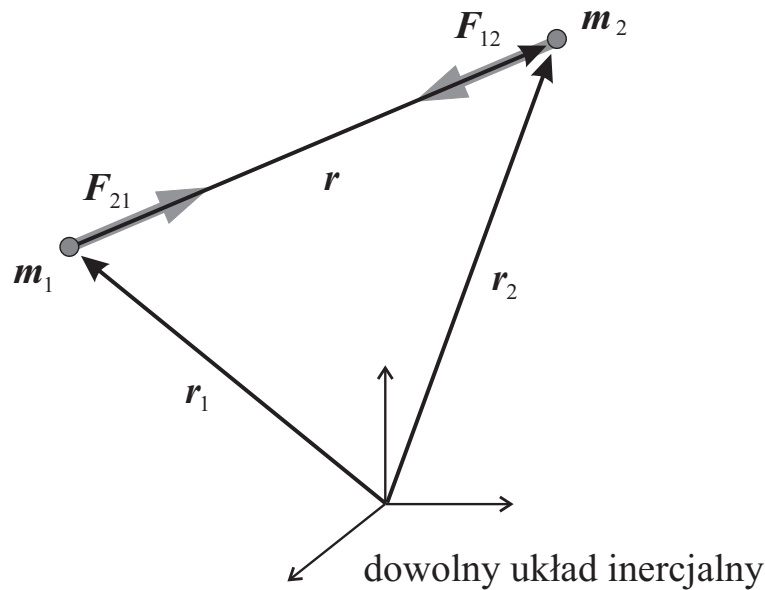
Siła  $\mathbf{F}_{21}$  z jaką punkt materialny o masie  $m_2$  przyciąga punkt o masie  $m_1$  jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich wzajemnej odległości. Jest ona skierowana wzdłuż odcinka łączącego oba punkty.

Na Rys. 1.1 widać, że wektor  $\mathbf{F}_{21}$  skierowany jest od masy  $m_1$  do  $m_2$ ; informacja ta jest obecna w podanym wyżej tekście prawa, gdyż mówimy tam nie tylko o orientacji odcinka, lecz również o **przyciąganiu**, co jednoznacznie określa zwrot siły. Jeśli więc wektor  $\mathbf{r}$  ma początek w punkcie o masie  $m_1$  a koniec w punkcie o masie  $m_2$ , to siła  $\mathbf{F}_{21}$  skierowana jest zgodnie z  $\mathbf{r}$ . Najprościej można to wyrazić korzystając z **wersorów**. Przypomnijmy, że każdy wektor  $\mathbf{A}$  przedstawić można jako iloczyn jego długości  $A = \|\mathbf{A}\|$  i wersora  $\hat{\mathbf{A}}$  o jednostkowej długości, który zawiera jedynie informację o kierunku wektora

$$\mathbf{A} = A \hat{\mathbf{A}}. \quad (1.1)$$

W takim razie, dla wersorów siły  $\mathbf{F}_{21}$  i odległości względnej  $\mathbf{r}$  mamy

$$\hat{\mathbf{F}}_{21} = \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.2)$$



Rysunek 1.1: Dwa punkty materialne i siły ich wzajemnego przyciągania.

Pozostaje już tylko kwestia stałej proporcjonalności dla zależności siły od  $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ . Przyjmijmy, że stała ta jest równa  $k^2$  i możemy przejść od postaci słownej prawa grawitacji do postaci wzoru

$$\mathbf{F}_{21} = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.3)$$

Użycie stałej  $k^2$  nie pozostawia żadnej wątpliwości co do jej znaku (jeśli  $k$  jest dowolną liczbą rzeczywistą, to  $k^2 \geq 0$ ) i wzór (1.3) musi opisywać prawo przyciągania a nie odpychania.

Fakt, że przyciąganie jest wzajemne i że również masa  $m_1$  przyciągana jest przez  $m_2$  skierowaną przeciwie siłą  $\mathbf{F}_{12}$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.4)$$

choć jest równie ważny jak (1.3), nie wchodzi bezpośrednio w skład prawa grawitacji, lecz jest prostą konsekwencją III zasady dynamiki Newtona.

## 1.2 Stała Gaussa

Poświęćmy nieco więcej uwagi stałej  $k$ , która pojawiła się w poprzednim rozdziale. Nosi ona nazwę **stałej Gaussa** i używamy jej w astronomii zamiast znanej z kursu fizyki stałej grawitacji  $G$ . Tak więc, jeśli w jednostkach SI

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (1.5)$$

to stała Gaussa ma w tych jednostkach wartość

$$k = \sqrt{G} = (8.16922 \pm 0.00041) \times 10^{-6} \text{ m}^{\frac{3}{2}} \text{ kg}^{-\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}. \quad (1.6)$$

Podana wyżej wartość  $k$  wynika z prostego przeliczenia rekomendowanej oficjalnie przez Międzynarodową Unię Astronomiczną (IAU) wartości stałej  $G$ . Ale – paradoksalnie – nie jest to wartość  $k$  rekomendowana przez IAU. Unia Astronomiczna przyjęła, że wartość stałej Gaussa wyrażona w dobach d, masach słońca  $M_{\odot}$  i jednostkach astronomicznych AU wynosi

$$k = 0.01720209895 \text{ AU}^{\frac{3}{2}} \text{ M}_{\odot}^{-\frac{1}{2}} \text{ d}^{-1}. \quad (1.7)$$

Jest to wartość, która nie ulegnie zmianie w wyniku dalszych obserwacji, ponieważ (1.7) przyjęto jako tzw. stałą definiującą. W odróżnieniu od wartości (1.6), która posiada jedynie 4 miejsca znaczące dokładne, stała Gaussa (1.7) posiada nie tylko 10, ale w zasadzie nieskończenie wiele miejsc znaczących. Wolno nam dopisać dowolną ilość zer po prawej stronie, gdyż jako stała definiująca nie posiada ona niepewności pomiarowej.

Niepewności pomiarowe ukryte są w zastosowanych jednostkach. O ile doba, tradycyjnie zwana średnią dobą słoneczną, przeliczana jest na sekundy w sposób ścisły

$$1 \text{ d} = 86400 \text{ s}, \quad (1.8)$$

o tyle pozostałe jednostki znane są z ograniczoną dokładnością. Co gorsza, ich wartości mogą zależeć od rodzaju skali czasu, czyli od definicji sekundy (dalej podamy wartości spójne z sekundą TDB). Jednostka astronomiczna – poglądowo, acz nie do końca ściśle, zwana średnią odległością Ziemi od Słońca – jest przy tym wyznaczona o wiele lepiej niż masa Słońca, mamy bowiem

$$1 \text{ AU} = (1.49597870700 \times 10^{11}) \pm 3 \text{ m}, \quad (1.9)$$

z jedenastoma pewnymi miejscami znaczącymi, ale już

$$1 \text{ M}_{\odot} = (1.9884 \pm 0.0002) \times 10^{30} \text{ kg}, \quad (1.10)$$

z czterema zaledwie miejscami znaczącymi. Przyszłe dokładniejsze wyznaczenia masy Słońca będą wpływać na definicję jednostki astronomicznej tak, aby utrzymać podaną w równaniu (1.7) wartość stałej Gaussa.

### 1.3 Równania ruchu zagadnienia dwóch ciał

Gdy już wiemy, jak wyglądają działające w zagadnieniu dwóch ciał siły, możemy sięgnąć do pierwszych dwóch zasad dynamiki Newtona, aby sformułować równania ruchu obu mas. Zasada pierwsza postuluje istnienie układu inercyjnego w którym opisywać będziemy zmiany położenia  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  bez konieczności wprowadzania „sił pozornych”. Druga zasada dynamiki wiąże przyspieszenia

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}, \quad i = 1, 2, \quad (1.11)$$

z działającymi siłami. Wynika z niej, że

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} = \frac{k^2 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} = -\frac{k^2 m_1}{r^3} \mathbf{r},\end{aligned}\tag{1.12}$$

gdzie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}.$$

Równania (1.12) stanowią układ sześciu równań różniczkowych (każdy wektor  $\mathbf{r}_i$  posiada trzy współrzędne) z których każde zawiera drugą pochodną względem czasu  $t$  jako zmiennej niezależnej. Jest to więc układ dwunastego rzędu.

Czasami wygodniej jest używać układu równań różniczkowych sprowadzonego do postaci 12 równań, z których każde zawiera tylko pierwszą pochodną względem czasu. Przekształcenie takie jest elementarne i wymaga wprowadzenia dodatkowych zmiennych

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, \quad i = 1, 2.\tag{1.13}$$

Z fizycznego punktu widzenia te dodatkowe zmienne to nic innego jak prędkości obu mas. Możemy więc w miejsce (1.12) wprowadzić układ

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{v}_1, \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{v}_2, \\ \dot{\mathbf{v}}_1 &= \frac{k^2 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \\ \dot{\mathbf{v}}_2 &= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \mathbf{r},\end{aligned}\tag{1.14}$$

który również jest układem dwunastego rzędu, gdyż zawiera dwanaście równań z pierwszymi pochodnymi.

Jeśli znamy położenia i prędkości obu ciał w pewnym momencie czasu (epoce)  $t_0$ , zwane **warunkami początkowymi**, i chcemy znaleźć położenia i prędkości w dowolnym momencie czasu  $t$ , to problem taki nazywamy zagadnieniem Cauchy'ego lub zagadnieniem początkowym. Czasami zamiast warunków początkowych zadaje się wartości położenia w dwóch różnych epokach czyli warunki brzegowe. Prowadzi to do tzw. zagadnienia brzegowego, które odgrywa istotną rolę w procesie wyznaczania orbit z obserwacji. W dalszej części wykładu zajmować się będziemy jedynie zagadnieniem Cauchy'ego z warunkami początkowymi w postaci

$$\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_{1,0}, \quad \mathbf{r}_2(t_0) = \mathbf{r}_{2,0}, \quad \mathbf{v}_1(t_0) = \mathbf{v}_{1,0}, \quad \mathbf{v}_2(t_0) = \mathbf{v}_{2,0}.\tag{1.15}$$

Co możemy powiedzieć o równaniach (1.12) lub (1.14), zanim zaczniemy je rozwiązywać? Po pierwsze, są to równania autonomiczne, to znaczy, że nie pojawia się w nich jawna zależność od czasu. Prawe strony równań zależą tylko

od stałych parametrów  $k$ ,  $m_1$  i  $m_2$ , oraz od zmiennych zależnych:  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  (za pośrednictwem  $\mathbf{r}$ ) w równaniach (1.12) oraz dodatkowo  $\mathbf{v}_1$  i  $\mathbf{v}_2$  w równaniach (1.14). Są to także układy równań nieliniowych, a to oznacza, że nie można zastosować do nich bezpośrednio prostych szablonów rozwiązania znanych z elementarnej teorii równań różniczkowych.

## 1.4 Dodatek: prędkość radialna i transwersalna

Przypomnijmy kilka ważnych wzorów związanych z rozkładem prędkości  $\mathbf{v}$  na składową radialną  $\mathbf{v}_r$  i transwersalną (poprzeczną)  $\mathbf{v}_t$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t.$$

Składowa radialna powstaje przez rzut wektora prędkości na kierunek promienia wodzącego, czyli

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}.$$

Opisuje ona zmiany długości wektora położenia  $\mathbf{r}$ , a więc

$$v_r = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \dot{r}.$$

Składowa transwersalna leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  i jest prostopadła do wektora położenia. Wersor transwersalny  $\hat{\mathbf{t}}$  spełnia więc

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{r} = \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0.$$

Skoro prędkość radialna opisuje zmiany długości wektora położenia  $\mathbf{r}$ , to prędkość transwersalna opisuje zmiany kierunku tego wektora, czyli zmiany wersora  $\hat{\mathbf{r}}$ . Wprowadzając kąt pozycyjny  $\vartheta$  mierzony od dowolnie wybranego kierunku na płaszczyźnie zawierającej  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  do wektora  $\mathbf{r}$ , możemy stwierdzić, że zgodnie z wzorami opisującymi ruch po okręgu (wykluczamy zmiany długości  $r$  jako opisane prędkością radialną!) zachodzi  $v_t = r\dot{\vartheta}$ . Mamy zatem

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r\dot{\vartheta} \hat{\mathbf{t}}. \quad (1.16)$$

Z równania (1.16) wynika bardzo ważna własność

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\dot{r}. \quad (1.17)$$

Dowód tej własności jest elementarny:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_t.$$

A ponieważ  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_t = 0$ , gdyż te dwa wektory są prostopadłe, to

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_r = \dot{r} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \dot{r} r.$$

Jeśli zaś chodzi o iloczyn wektorowy, to

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = r^2 \dot{\vartheta} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{t}}). \quad (1.18)$$

Dowód jest równie prosty. Tym razem  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ , a zatem

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}_t = r v_t (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{t}}).$$

## Rozdział 2

# Całki barycentrum i redukcja do zagadnienia względnego

### 2.1 Całki pierwsze równań ruchu

Jednym ze sposobów rozwiązywania układów równań różniczkowych jest poszukiwanie ich całek pierwszych. Załóżmy, że mamy układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu  $N$  w postaci

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad (2.1)$$

gdzie  $\mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ . Załóżmy dalej, że  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t)$  jest rozwiązaniem układu (2.1). **Całką pierwszą** układu (2.1) nazywamy każdą funkcję  $K(\mathbf{y}, t)$ , zadaną równaniem

$$K(\mathbf{y}, t) = C,$$

która jest stała, gdy w miejsce  $\mathbf{y}$  podstawimy dowolne rozwiązanie  $\mathbf{y}^*(t)$  tego układu i która zależy tylko od jednej **stałej dowolnej**  $C$ . Stała dowolna  $C$  zależy od warunków początkowych  $\mathbf{y}_0$ . W mechanice, gdy (2.1) są równaniami ruchu, ich całkę pierwszą nazywamy czasem **całką ruchu** a stałą  $C$  – **stałą ruchu**.

Wbrew pozorom, nie musimy znać rozwiązań  $\mathbf{y}^*(t)$  aby zbadać, czy jakaś funkcja jest całką ruchu czy nie. Warunek  $K(\mathbf{y}, t) = \text{const}$ , czyli  $\dot{K} = 0$ , sprawdzamy korzystając z wzoru na pochodną funkcji złożonej

$$\frac{dK(\mathbf{y}, t)}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial K}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial K}{\partial y_j} f_j. \quad (2.2)$$

Skorzystaliśmy przy tym z postaci równań ruchu (2.1) zastępując  $\dot{y}_i$  przez  $f_i$ .

Jeśli pojawi się  $M$  całek ruchu  $K_1, K_2, \dots, K_M$ , to czasem można je potraktować jako elementy wektora  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^M$ . Wektorowa całka ruchu  $\mathbf{K}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{C}$ ,

związana z wektorem stałych ruchu  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^M$ , musi spełniać warunki

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{J} \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

gdzie  $\mathbf{J}$  oznacza macierz pochodnych cząstkowych (macierz Jacobiego)

$$\mathbf{J} = \left[ \frac{\partial K_i}{\partial y_j} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial K_1}{\partial y_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial K_M}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial K_M}{\partial y_N} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Znajomość całek ruchu jest bardzo ważna, ponieważ każda nowa i niezależna od pozostałych całka ruchu pozwala obniżyć rząd układu o 1. A ponieważ każde pojedyncze równanie różniczkowe pierwszego rzędu potrafimy rozwiązać, to znalezienie  $N - 1$  niezależnych od siebie całek pierwszych jest równoznaczne z rozwiązaniem układu równań (2.1).

## 2.2 Całki barycentrum

Dwie główne metody poszukiwania całek ruchu, to:

- a) postulowanie (zgadywanie) postaci całki  $\mathbf{K}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{C}$  i użycie warunku (2.2) do weryfikacji,
- b) doprowadzenie równań ruchu do jawnej postaci  $\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$ .

Zacznijmy od sposobu drugiego i rozpatrzmy równania ruchu zagadnienia dwóch ciał (1.12) pomnożone stronami przez odpowiednie masy

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{21} = \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{12} = -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Jeśli dodamy je stronami, to otrzymamy

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Ten związek, będący oczywistą konsekwencją III zasady dynamiki, zawiera po lewej stronie pochodną zupełną względem czasu, gdyż

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}, \quad i = 1, 2,$$

czyli

$$\frac{d}{dt} [m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2] = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest więc stałe: prędkości obu mas w zagadnieniu podlegają ciągłym zmianom, ale ich kombinacja liniowa z masami  $m_1$  i  $m_2$



ma niezmienną wartość, którą oznaczmy  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ . To oznacza, że znaleźliśmy wektorową całkę ruchu

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}. \quad (2.8)$$

Zauważmy, że w języku fizycznym możemy wyrazić (2.8) następująco:

całkowity pęd w zagadnieniu dwóch ciał jest stały.

Jest to własność wszystkich układów, gdzie mamy do czynienia tylko z oddziaływaniami wzajemnymi w układzie inercyjnym.

Równanie (2.8) pozwala nam wykonać jeszcze jeden krok. Zauważmy, że

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, \quad i = 1, 2,$$

a więc lewa strona (2.8) jest nadal pochodną zupełną względem czasu

$$\frac{d}{dt} [m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2] = \mathbf{A}. \quad (2.9)$$

Co prawda, po prawej stronie nie mamy zera, ale przecież

$$\mathbf{A} = \frac{d(\mathbf{A}t)}{dt},$$

więc możemy zapisać (2.9) jako

$$\frac{d}{dt} [m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{A}t] = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

A więc znów mamy sytuację, w której wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest stałe: znaleźliśmy kolejną wektorową całkę ruchu

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{A}t = \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

z nowym wektorem stałych ruchu  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$ .

Całki ruchu (2.8) i (2.11) noszą nazwę **całek barycentrum** czyli całek środka masy. Nazwa ta staje się jasna, gdy przystąpimy do fizycznej interpretacji tych równań. Przypomnijmy definicję środka masy (barycentrum) dwóch punktów materialnych; jest to punkt będący końcem geometrycznego wektora

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.12)$$

W przyjętym przez nas układzie współrzędnych punkt ten ma prędkość

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.13)$$

A zatem pierwsze dwa wyrazy lewej strony równości (2.11) to nic innego jak  $(m_1 + m_2)\mathbf{R}$ , a  $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$  w równaniu (2.8) to iloczyn sumy mas przez

prędkość barycentrum  $\dot{\mathbf{R}}$ . Możemy więc przepisać całki barycentrum (2.8) i (2.11) w równoważnej postaci

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= (\mathbf{A}t + \mathbf{B})/(m_1 + m_2), \\ \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{A}/(m_1 + m_2).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Prowadzi to do następującego ważnego twierdzenia

Środek masy dwóch ciał w dowolnym układzie inercyjnym porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Istotną konsekwencją tego twierdzenia jest wniosek, że

jeśli środek układu odniesienia umieścimy w barycentrum dwóch ciał a osie zachowywać będą stałą orientację w przestrzeni, to taki układ, zwany układem barycentrycznym, będzie układem inercyjnym.

Całki barycentrum uwalniają nas od operowania tajemniczym „dowolnym układem inercyjnym”. Dzięki nim wiemy, gdzie jeden z takich układów ma swój środek. W układzie barycentrycznym  $\mathbf{R} = \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ , a to oznacza  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$  i z całek (2.8,2.11) dowiadujemy się, że w układzie barycentrycznym

$$\begin{aligned}m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 &= \mathbf{0}, \\ m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Ruch jednego ciała względem barycentrum będzie więc wierną kopią ruchu drugiego ciała, przeskalowaną o czynnik równy stosunkowi mas. Dysponujemy w tym momencie podpowiedzią, że obniżenie rzędu zagadnienia dwóch ciał z 12 do 6, możliwe dzięki wykorzystaniu sześciu całek barycentrum, pozwala w istocie rozpatrywać ruch **jednego ciała** względem barycentrum, albo też ruch względny jednego ciała odniesiony do drugiego. To drugie podejście jest bardziej atrakcyjne, gdyż prawe strony równań (1.12) lub (1.14) zawierają wprost względne położenie  $\mathbf{r}$ .

## 2.3 Względne zagadnienie dwóch ciał

Dzięki całkom barycentrum możemy sobie pozwolić na chwilowe pominięcie informacji o położeniu jednego z ciał bez obawy utraty tej informacji. Wróćmy więc do równań (1.12)

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= k^2 \frac{m_2}{r^3} \mathbf{r}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -k^2 \frac{m_1}{r^3} \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Możemy je odjąć stronami otrzymując

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

A zgodnie z definicją  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$ , otrzymujemy **równania ruchu względnego**

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.16)$$

gdzie

$$\mu = k^2 (m_1 + m_2), \quad (2.17)$$

nazywamy **parametrem grawitacyjnym**.

Oczywiście i tutaj możemy zastosować alternatywną postać układu (2.16), wprowadzając wektor prędkości  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  i przechodząc do układu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

zawierającego 6 równań pierwszego rzędu.

Równania (2.16) lub (2.18) tworzą układ szóstego rzędu i opisują ruch ciała o masie  $m_2$  w układzie współrzędnych związanym z masą  $m_1$ . Wbrew nazwie jest to więc zagadnienie jednego ciała w zadanym polu sił. Należy podkreślić, że układ współrzędnych o środku w  $m_1$  nie jest układem inercyjnym; masa  $m_1$  nie porusza się przecież względem barycentrum ruchem jednostajnym prostoliniowym. Mimo to, postać równań ruchu wygląda bardzo podobnie do (1.12). Prawa strona równań (2.16) zawiera sumę przyspieszenia grawitacyjnego ( $-k^2 m_1 r^{-3} \mathbf{r}$ ) oraz przyspieszenia „pozornego” wywołanego nieinercjalnością układu odniesienia ( $-\ddot{\mathbf{r}}_1$ ), które ma niemal identyczną postać ( $-k^2 m_2 r^{-3} \mathbf{r}$ ). W efekcie, zagadnienie względne można potraktować tak, jakby ruch odbywał się w układzie inercyjnym ale ze zmodyfikowanym prawem grawitacji (siła proporcjonalna do iloczynu  $(m_1 + m_2) m_2$  zamiast do  $m_1 m_2$ ).

## Rozdział 3

# Całki ruchu zagadnienia względnego

Aby w pełni rozwiązać względne zagadnienie dwóch ciał musimy znaleźć 5 niezależnych całek pierwszych.

### 3.1 Całka siły żywej (energii)

Jeśli punkt materialny porusza się w polu sił, które nie zależą jawnie od czasu ani od prędkości, to całkowita energia (kinetyczna i potencjalna) tego punktu jest stała. Energia całkowita jest sumą energii potencjalnej i kinetycznej. Ponieważ energia kinetyczna jest proporcjonalna do  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ , zaś

$$\frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 2\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v},$$

to spróbujmy poszukać nowej całki ruchu biorąc drugie z równań (2.18) i mnożąc obie strony skalarnie przez  $\mathbf{v}$ , gdyż wtedy po lewej stronie równania

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.1)$$

mamy już wyraz będący pochodną zupełną znanej funkcji  $\frac{1}{2}v^2$ . Skoro operacją odwrotną do różniczkowania jest całkowanie, to możemy przepisać (3.1) jako w postaci

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{v^2}{2} + \int \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} dt \right] = 0.$$

Pozostaje tylko pytanie, czy potrafimy obliczyć całkę nieoznaczoną występującą w tym wzorze.

Dzięki podstawowej własności  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ , znanej z równania (1.17), możemy wykonać następujące całkowanie

$$\int \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} dt = \mu \int \frac{r\dot{r}}{r^3} dt = \mu \int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dt = \mu \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{\mu}{r}.$$

I tak doszliśmy do

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right] = 0,$$

więc wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest całką ruchu. Oznaczając odpowiednią stałą ruchu przez  $h$ , mamy

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = h. \quad (3.2)$$

Wzór (3.2) nazywamy **całką siły żywej** (łac. *vis viva*), co jest nieco archaicznym (trzy wieki tradycji) ale nie pozbawionym swoistego uroku synonimem całki energii. Stałą dowolną  $h$  nazywamy odpowiednio **stałą siły żywej** lub stałą energii.

## 3.2 Całki pól

### 3.2.1 Wektorowe całki pól (momentu pędu)

Siła działająca we względnym zagadnieniu dwóch ciał ma charakter radialny, gdyż jest skierowana zawsze do środka układu współrzędnych. Jak wiemy, każda siła radialna  $\mathbf{F}$  ma zerowy moment  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , a więc nie może zmienić momentu pędu  $\mathbf{r} \times m_2 \mathbf{v}$ . To oznacza, że w naszym zagadnieniu powinna istnieć wektorowa całka momentu pędu

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}, \quad (3.3)$$

zwana także tradycyjnie całką lub poprawniej **całkami pól**. **Stale pól** tworzą wektor  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^3$ , którego długość i kierunek są stałe.

Jak zweryfikować całki pól (3.3)? Najprościej jest z różniczkować iloczyn wektorowy względem czasu:

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}.$$

Sięgając do równań ruchu (2.18) otrzymamy

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \left( -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right).$$

Ponieważ dla dowolnego wektora  $\mathbf{y} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ , więc istotnie  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$ .

Z wektorowych całek pól wypływa bardzo ważny wniosek:

Orbita masy  $m_2$  względem masy  $m_1$  jest krzywą płaską gdy  $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$  lub leży na prostej gdy  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ .

Uzasadnienie jest oczywiste, gdyż jeśli wektory położenia i prędkości definiują pewną płaszczyznę w momencie czasu  $t_0$ , a wektor momentu pędu  $\mathbf{G}$  jest do tej płaszczyzny prostopadły, to wobec stałości kierunku  $\mathbf{G}$  płaszczyzna w której leżą  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  w dowolnym momencie czasu musi mieć taką samą orientację w

przestrzeni. Ze względu na definicję  $\mathbf{r}$  (od  $m_1$  do  $m_2$ ) obie masy muszą należeć do tej płaszczyzny. Zerowy moment pędu pojawia się, gdy  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$  (wykluczamy zarówno  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  jak i  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) i wtedy obie masy muszą cały czas pozostawać na prostej. W takim przypadku mówimy o **orbitach zdegenerowanych**. Zauważmy, że tylko na orbicie prostoliniowej możliwa jest kolizja  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  i tylko na orbicie prostoliniowej możliwa jest sytuacja, gdy w pewnym momencie  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  w skończonej odległości między ciałami  $r$ .

### 3.2.2 Całka pól w postaci skalarnej i II prawo Keplera

Pokażemy teraz, że bezpośrednią konsekwencją istnienia całek pól jest II prawo Keplera.

#### Skalarna całka pól

Zastosujmy własność (1.18) do względnego zagadnienia dwóch ciał. Moment pędu (na jednostkę masy) zdefiniowaliśmy jako  $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ . W takim razie

$$\mathbf{G} = r^2 \dot{\vartheta} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{t}}),$$

a ponieważ  $\mathbf{G} = G \hat{\mathbf{G}}$ , przy czym

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{t}},$$

to długość wektora momentu pędu jest powiązana z chwilową prędkością kątową ciała na orbicie wzorem

$$G = r^2 \dot{\vartheta},$$

czyli

$$\dot{\vartheta} = \frac{G}{r^2}. \quad (3.4)$$

Jak dotąd, oba wzory mają charakter ogólny i obowiązują także dla zmiennego momentu pędu. Jeśli jednak wprowadzimy do nich wynikającą z wektorowych całek pól informację, że  $G = \text{const}$ , otrzymamy wzór zwany skalarną postacią całki pól lub krótko **całką pól** (liczba pojedyncza w odróżnieniu od liczby mnogiej „całki pól” w przypadku wektorowym)

$$G = r^2 \dot{\vartheta} = \text{const}, \quad (3.5)$$

Jeszcze inny zapis całki pól to

$$G = r v_t = \text{const}, \quad (3.6)$$

a więc:

iloczyn odległości i prędkości transwersalnej jest w zagadnieniu względnym dwóch ciał stały,

Wykażemy teraz, że skalarna całka pól jest w istocie tożsama z drugim prawem Keplera.

### Prędkość polowa

Dla dowolnych dwóch wektorów  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  o wspólnym początku pole trójkąta wyznaczonego przez nie wynosi

$$S = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|. \quad (3.7)$$

Ze względu na użycie długości wektora  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , wzór (3.7) pozostaje ważny także przy zamianie  $\mathbf{a}$  na przeciwnie skierowany wektor  $-\mathbf{a}$  a więc i wtedy, gdy koniec jednego wektora jest początkiem drugiego.

Rozpatrzmy teraz ruch w zagadnieniu względnym dwóch ciał. Początkowy wektor położenia badanego ciała  $\mathbf{r}$  ulega podczas ruchu zmianie i po czasie  $\Delta t$  przechodzi w  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ . Trójkąt wyznaczony przez wektory  $\mathbf{r}$  i  $\Delta \mathbf{r}$  ma pole

$$\Delta S = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}\|.$$

Podzielmy obie strony przez przyrost czasu a otrzymamy

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right\|.$$

W granicy  $\Delta t \rightarrow 0$  przechodzimy od ilorazów różnic do pochodnych

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S},$$

oraz

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}.$$

A zatem dla chwilowej **prędkości polowej**  $\dot{S}$  czyli pochodnej pola zakreślanego przez wektor  $\mathbf{r}$  w ruchu po orbicie mamy

$$\dot{S} = \frac{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\|}{2}.$$

Przywołując całki pól (3.3) widzimy, że

$$\dot{S} = \frac{G}{2} = \text{const}, \quad (3.8)$$

czyli

w zagadnieniu względnym dwóch ciał prędkość polowa jest stała,

co stanowi treść II prawa Keplera. Zauważmy jednak, że II prawo Keplera dotyczy nie tylko zagadnienia dwóch ciał. Każde zagadnienie ruchu punktu materialnego w polu dowolnej siły radialnej będzie cechował stały moment pędu a więc w każdym takim zagadnieniu obowiązuje II prawo Keplera.

Do II prawa Keplera można także dojść wychodząc od infitezymalnego pola ograniczonego wycinkiem krzywej  $r(\vartheta)$ , czyli  $dS = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ , a następnie korzystając ze skalarnej całki pól (3.4).

## 3.3 Całki Laplace'a

### 3.3.1 Wyprowadzenie

Znamy już cztery całki ruchu zagadnienia względnego. Pozostała nam jedna, aby rozwiązać w pełni to zagadnienie. Dotąd korzystaliśmy z ogólnych własności, które były typowe dla szerszej klasy układów: brak jawnej zależności sił od czasu dał nam całkę energii (siły żywej), a symetria radialna oznaczała stały moment pędu. Szczęśliwie jednak okazało się, że w zagadnieniu dwóch ciał pojawia się dodatkowa, specyficzna dla tego problemu całka ruchu.

Odgadnięcie postaci nowej całki ruchu nie jest proste. Kluczem do jej znalezienia jest pomnożenie drugiego z równań (2.18) wektorowo przez moment pędu  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} \times \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{G} \times \mathbf{r}. \quad (3.9)$$

Ponieważ wektor  $\mathbf{G}$  jest stały, to lewą stronę rozpoznajemy bez trudu jako pochodną z  $\mathbf{G} \times \mathbf{v}$ . Możemy więc zapisać (3.9) jako

$$\frac{d}{dt} \left[ \mathbf{G} \times \mathbf{v} + \mu \int \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}}{r^3} dt \right] = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Nie wygląda to zbyt zachęcająco, ale wypiszmy jawnie definicję  $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  i skorzystajmy z tożsamości wektorowej Laplace'a

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}, \quad (3.11)$$

przyjmując  $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ . Zauważymy wtedy, że

$$\mathbf{G} \times \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = r^2 \mathbf{v} - r \dot{r} \mathbf{r},$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości (1.17). Tak więc całka w równaniu (3.10) ma postać

$$\int \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}}{r^3} dt = \int \left( \frac{1}{r} \right) \dot{r} dt + \int \left( -\frac{1}{r^2} \dot{r} \right) \mathbf{r} dt. \quad (3.12)$$

W równaniu (3.12) rozpoznajemy charakterystyczną postać przywodzącą na myśl całkowanie przez części:

$$\frac{d(FG)}{dt} = \dot{F}G + F\dot{G} \Rightarrow \int F\dot{G}dt + \int \dot{F}Gdt = FG,$$

gdzie  $F = 1/r$ , a  $G = \mathbf{r}$ . A zatem

$$\int \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}}{r^3} dt = \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{r}. \quad (3.13)$$

Podstawiając (3.13) do (3.10) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \left[ \mathbf{G} \times \mathbf{v} + \frac{\mu}{r} \mathbf{r} \right] = \mathbf{0},$$



a zatem wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest wektorową całką ruchu. Dzieląc stronami przez stały parametr  $(-\mu)$ , dochodzimy do równania

$$\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{G}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}, \quad (3.14)$$

definiującego **całki Laplace'a**. Wektor stałych ruchu  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  zwany jest odpowiednio wektorem Laplace'a lub **wektorem mimośrodowym**. W fizyce, gdzie całki Laplace'a odkrywano były niezależnie kilka razy, całki te noszą nazwę całek Rungego-Lenza, Lenza, lub Laplace'a-Rungego-Lenza. Czasami też odróżnia się wektor mimośrodowy  $\mathbf{e}$  od wektora Laplace'a  $\mathbf{L} = \mu\mathbf{e}$ .

Poszukiwaliśmy jednej całki ruchu, a otrzymaliśmy aż trzy. Układ równań szóstego rzędu może mieć co najwyżej 6 niezależnych całek pierwszych, z czego jedna musi zawierać stałą dowolną addytywną do czasu. Żadna z siedmiu znalezionych przez nas całek ruchu względnego zagadnienia dwóch ciał nie zawiera czasu w sposób jawny, więc tylko pięć z nich może być niezależnych. Aby wszystko się zgadzało, powinniśmy teraz znaleźć dwa związki między siedmioma całkami ruchu, co zredukuje liczbę niezależnych całek do pięciu.

### 3.3.2 Związki całek Laplace'a z pozostałymi całkami ruchu

Każda z całek ruchu wiązała się z jedną stałą ruchu. Każdy związek między całkami ruchu musi być zarazem związkiem między stałymi ruchu i *vice versa*. Poszukajmy więc dwóch związków między wektorem mimośrodowym  $\mathbf{e}$  a wektorem momentu pędu  $\mathbf{G}$  i stałą siły żywej  $h$ .

Pierwszy taki związek jest poniekąd oczywisty. Wektor  $\mathbf{e}$  jest sumą dwóch wektorów  $\hat{\mathbf{r}}$  i  $\mu^{-1}(\mathbf{G} \times \mathbf{v})$ , z których każdy leży w płaszczyźnie orbity. A zatem wektor mimośrodowy musi także leżeć w płaszczyźnie orbity, więc jest prostopadły do  $\mathbf{G}$ . W tej sytuacji

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (3.15)$$

jest pierwszym związkiem między stałymi ruchu.

Aby znaleźć drugi związek sprawdźmy, jak wygląda długość wektora  $\mathbf{e}$ . Podnosząc do kwadratu (czyli wykonując iloczyn skalarny wektora przez samego siebie) obie strony całki Laplace'a (3.14) dostajemy

$$\begin{aligned} e^2 &= \left( \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{G}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{G}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \\ &= \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G})}{\mu^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G})}{r\mu} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Okazuje się, że wzór ten można uprościć tak, aby w jego prawej stronie występowały jedynie stałe ruchu.

Zacznijmy od  $(\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G})$ . Jest to kwadrat długości wektora  $\mathbf{v} \times \mathbf{G}$ . A skoro prędkość i moment pędu są prostopadłe, to ich iloczyn wektorowy ma długość  $vG$ , więc

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) = v^2 G^2.$$

Jeśli chodzi o iloczyn  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G})$ , to dzięki własnościom iloczynu mieszanego

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

i definicji (3.3) widzimy, że

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{G} = G^2.$$

Tak więc, równanie (3.16) można zapisać jako

$$e^2 = \frac{G^2 v^2}{\mu^2} - \frac{2G^2}{\mu r} + 1 = 1 + \frac{2G^2}{\mu^2} \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right].$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym to nic innego jak lewa strona całki siły żywej (3.2), a więc możemy je zastąpić stałą siły żywej  $h$  i ostatecznie otrzymujemy

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{h G^2}{\mu^2}}. \quad (3.17)$$

Jest to związek między stałymi ruchu, który wskazuje na współzależność długości wektora Laplace'a od stałej energii  $h$  i długości wektora momentu pędu  $G$ .

Równania (3.15) i (3.17) pokazują, że spośród siedmiu całek ruchu tylko pięć jest niezależnych. Niemniej jednak, dysponujemy dostateczną liczbą całek ruchu aby rozwiązać w pełni zagadnienie względne. Szósta całka ruchu będzie zawierać jawną zależność od czasu, a skoro tak, to pięć znanych już całek powinno wystarczyć do znalezienia samego kształtu orbity w trójwymiarowej przestrzeni położeń jak i kształtu hodografu – krzywej w trójwymiarowej przestrzeni rozpiętej na składowych wektora prędkości.

### 3.3.3 Całki Laplace'a a I prawo Keplera

Wiemy już, że wektor Laplace'a leży w płaszczyźnie orbity. Aby dowiedzieć się jak jest skierowany na tej płaszczyźnie, pomnożymy skalarnie obie strony całek Laplace'a (3.14) przez wektor położenia  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G})}{\mu} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r}.$$

Przestawiając czynniki w mieszanym iloczynie wektorowym

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

dochodzimy do postaci

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{G^2}{\mu} - r.$$

Zauważmy, że można z tego związku wyznaczyć odległość między ciałami

$$r = \frac{G^2}{\mu (1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e})}, \quad (3.18)$$

gdzie prawa strona zależy tylko od całek ruchu i kąta między wektorem  $\hat{r}$  a wektorem Laplace'a  $e$ .

Odległość między ciałami osiągnie minimum gdy mianownik we wzorze (3.18) przyjmie największą wartość. Jeśli więc wektor położenia skierowany jest zgodnie z wektorem Laplace'a, to najmniejsza odległość między ciałami wyniesie

$$r_{\min} = q = \frac{G^2}{\mu(1+e)}. \quad (3.19)$$

Jak widać, wektor Laplace'a skierowany jest ze środka układu współrzędnych do punktu minimalnej odległości między ciałami. Punkt orbity w którym odległość między ciałami osiąga minimum nazywamy w ogólności **perycentrum** a jeśli masa znajdująca się w środku układu współrzędnych jest konkretnym ciałem niebieskim, to mówimy odpowiednio o perygeum dla Ziemi, perihelium dla Słońca, peryselenium dla Księżyca itd. Odległość  $q$  nazywamy **odległością perycentrum**.

Równanie (3.18) stanowi w istocie równanie orbity we współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie prostopadłej do  $G$ . Wprowadźmy kąt pozycyjny  $f$  mierzony od wektora Laplace'a  $e$  do promienia wodzącego  $r$ . Kąt ten nosi tradycyjną nazwę **anomalii prawdziwa**. Wtedy

$$e \cdot \hat{r} = e \cos f,$$

i jeśli przyjmiemy oznaczenie

$$p = \frac{G^2}{\mu}, \quad (3.20)$$

to równanie orbity (3.18) przyjmuje postać

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}. \quad (3.21)$$

Z geometrii analitycznej wiemy, że jest to równanie opisujące krzywą stożkową – elipsę, parabolę lub hiperbolę, której ognisko znajduje się w środku układu odniesienia, czyli w punkcie materialnym  $m_1$ . W ten sposób z całek Laplace'a otrzymaliśmy uogólnione I prawo Keplera. Uogólnienie oznacza, że orbita może być nie tylko elipsą, co przyjmował Kepler, lecz dowolną krzywą stożkową. Orbita może być zarówno krzywą zamkniętą (okrąg dla  $e = 0$  i elipsa dla  $0 < e < 1$ ) jak i krzywą otwartą (parabola dla  $e = 1$  i hiperbola dla  $e > 1$ ).

Wielkość oznaczona symbolem  $p$  to **parametr** krzywej stożkowej znany także jako *semilatus rectum*. Geometryczna interpretacja  $p$  jest oczywista: jest to wartość jaką przyjmuje odległość  $r$  gdy  $\cos f = 0$ , a więc dla  $f \pm \frac{\pi}{2}$ . Natomiast długość wektora Laplace'a  $e$  to nic innego jak **mimośród** krzywej stożkowej. Bez względu na typ orbity możemy korzystając z równania (3.21) wyprowadzić związek między odległością perycentrum  $q$  a parametrem  $p$  i mimośrodem  $e$ . Podstawiając  $f = 0$  jako wartość anomalii prawdziwej w perycentrum, otrzymujemy  $q = p/(1+e)$ , czyli

$$p = q(1+e). \quad (3.22)$$

### 3.3.4 Stała energii a kształt orbity

Z punktu widzenia geometrii o kształcie regularnej krzywej stożkowej decyduje jej mimośród  $e$ . Jeśli  $e < 1$  i krzywa jest elipsą, to parametr  $p = a(1 - e^2)$ , gdzie  $a$  jest **półosią wielką elipsy**. W przypadku  $e > 1$ , a więc dla hiperboli, przyjmuje się albo  $p = a(1 - e^2)$  albo  $p = a(e^2 - 1)$ . Jest to kwestia konwencji: ponieważ  $p$  jako odległość musi być wielkością nieujemną, to widać, że w pierwszym przypadku przyjmujemy ujemne wartości  $a$ , natomiast w drugim  $a > 0$ . Dla hiperboli symbol  $a$  oznacza tak zwaną **półoś rzeczywistą**. W geometrii częściej spotykamy  $a > 0$ , natomiast w mechanice nieba stosuje się czasem ujemne wartości półosi rzeczywistej. Ponieważ musimy się na coś zdecydować, przyjmijmy  $a > 0$  dla hiperboli i wtedy

$$p = \begin{cases} a(1 - e^2) & \text{dla elipsy,} \\ a(e^2 - 1) & \text{dla hiperboli.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Oczywiście, możemy też pisać wymijająco  $p = |a(1 - e^2)|$ . W przypadku paraboli żaden z wzorów (3.23) nie jest prawdziwy, gdyż dla paraboli nie wprowadza się pojęcia półosi. Pozostaje jednak wtedy prawdziwy wzór (3.22), który po podstawieniu  $e = 1$  przyjmuje postać  $p = 2q$ . Mamy więc dla paraboli odległość perycentum równą połowie parametru  $p$ . Uwzględniając definicje (3.23), możemy więc przekształcić (3.22) do postaci

$$q = \begin{cases} a(1 - e) & \text{dla elipsy,} \\ \frac{1}{2}p & \text{dla paraboli,} \\ a(e - 1) & \text{dla hiperboli.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Wbrew pozorom, mimośród nie jest jedyną wielkością, którą należy rozpatrzyć aby wyciągać wnioski o kształcie orbity. Przypomnijmy związek, jaki zachodzi między całkami pól, siły żywej i Laplace'a, czyli równanie (3.17). Podstawmy do niego definicję  $p = G^2/\mu$  a otrzymamy

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{hp}{\mu}}.$$

Wyznamy teraz stałą energii (siły żywej)  $h$  z tego związku

$$h = -\frac{\mu(1 - e^2)}{2p}. \quad (3.25)$$

Dla paraboli, gdy  $e = 1$ , otrzymamy  $h = 0$ . Natomiast dla elipsy lub hiperboli wzór (3.23) podstawiony do (3.25) daje odpowiednio  $h = -\mu/(2a) < 0$  lub  $h = \mu/(2a) > 0$ . Otrzymaliśmy więc drugie kryterium dla kształtu orbity, jakim jest wartość stałej  $h$

$$h = \begin{cases} -\frac{\mu}{2a} < 0 & \text{dla elipsy,} \\ 0 & \text{dla paraboli,} \\ \frac{\mu}{2a} > 0 & \text{dla hiperboli.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Już za chwilę przekonamy się, że to drugie kryterium jest równie ważne jak pierwsze.

### 3.3.5 Orbity zdegenerowane (prostoliniowe)

Równanie orbity (3.21) ma sens tylko wtedy, gdy parametr  $p \neq 0$ . Innymi słowy, regularne krzywe stożkowe otrzymujemy tylko dla ruchu z niezerowym momentem pędu  $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$ , ponieważ  $p = G^2/\mu$ . Płynący z równania (3.21) wniosek, że  $r = 0$  byłby fałszywy, bo możemy sobie wyobrazić spadek swobodny jednego ciała na drugie, który ma postać ruchu prostoliniowego z  $r \neq 0$ . Jak więc opisać orbitę prostoliniową?

Wróćmy do całek Laplace'a (3.14). Podstawiając  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ , upraszczamy je do postaci

$$\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.27)$$

Jak widać, wektor Laplace'a w ruchu prostoliniowym jest skierowany przeciwnie do promienia wodzącego  $\mathbf{r}$ , co oznacza przy okazji, że wersor  $\hat{\mathbf{r}}$  jest stały. Co więcej, długość wektora  $\mathbf{e}$ , czyli mimośród jest równa 1, a więc

orbity prostoliniowe mają mimośród  $e = 1$ .

Skoro zarówno orbity paraboliczne jak i prostoliniowe mają  $e = 1$ , to jak odróżnić jedne od drugich? Rozstrzygającym kryterium są równania (3.26). Jeśli orbita ma  $h = 0$ , to jest niewątpliwie paraboliczna. W przeciwnym wypadku  $e = 1$  oznacza zdegenerowaną elipsę, gdy  $h < 0$ , lub zdegenerowaną hiperbolę gdy  $h > 0$ .

Anomalia prawdziwa  $f$  jako kąt między wektorami  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{r}$  jest dla orbit prostoliniowych poprawnie określona. Tyle tylko, że ma ona wartość stałą, wynoszącą  $f = \pi$  i nie można jej użyć do parametryzacji ruchu poprzez  $r = r(f)$ . Jak widać, do poprawnego opisu wszystkich typów orbit potrzebny jest inny kąt, który wprowadzimy w dalszej części wykładu.

### 3.3.6 Położenie i prędkość jako funkcja anomalii prawdziwej

Wykluczając z rozważań orbity prostoliniowe, możemy już teraz podać kilka zasadniczych wzorów opisujących położenie i prędkość w zagadnieniu względnym jako funkcje anomalii prawdziwej. Wprowadzimy w tym celu tzw. perycentryczny układ współrzędnych  $O\xi\eta\zeta$ , którego środek  $O$  znajduje się w masie  $m_1$ , oś  $O\xi$  skierowana jest do perycentrum, oś  $O\zeta$  pokrywa się wektorem momentu pędu  $\mathbf{G}$ , natomiast oś  $O\eta$  uzupełnia trójkę osi tak, aby powstał prawoskrętny układ kartezjański, to znaczy leży w płaszczyźnie orbity, prostopadle do osi  $O\zeta$  i skierowana jest tak, że ciało zaczynające ruch w perycentrum ma prędkość  $\dot{\eta} > 0$ .

W układzie perycentrycznym współrzędna  $\zeta$  i prędkość  $\dot{\zeta}$  są równe 0, więc zajmujemy się tylko zmiennymi  $\xi$  i  $\eta$ . Rzutując promień wodzący  $\mathbf{r}$  na osie układu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos f, \\ \eta &= r \sin f, \end{aligned} \quad (3.28)$$

gdzie odległość  $r$  dana jest wzorem (3.21).

Prędkość radialna i transwersalna jako funkcje anomalii prawdziwej otrzymujemy dzięki skalarnej całce pól i wnioskowi z całek Laplace'a: skoro kierunek do perycentrum jest stały, to możemy od niego mierzyć kąt pozycyjny  $\vartheta$  i utożsamić go z anomalią prawdziwą  $f$ . Mamy więc, w świetle (1.16),

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{df} \frac{df}{dt} = -\frac{p}{(1 + e \cos f)^2} (-e \sin f) \left[ \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \right],$$

gdzie wyraz w nawiasie kwadratowym to  $\dot{f}$  ze skalarnej całki pól (3.4) połączonej z definicją  $G$  daną wzorem (3.20). A zatem, powracając do definicji (3.21) aby pozbyć się wyrazów  $(1 + e \cos f)$ ,

$$v_r = \frac{r^2 e \sin f}{p} \left[ \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \right] = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f.$$

Prędkość transwersalną otrzymujemy bez trudu z całki pól w postaci (3.6) i definicji (3.20)

$$v_t = \frac{\sqrt{\mu p}}{r}.$$

Tak więc

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f, \\ v_t &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos f). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Istnieje wiele sposobów otrzymania składowych  $\dot{\xi}$  i  $\dot{\eta}$  prędkości. Podejście bezpośrednie wymaga jedynie zróżniczkowania względem czasu wzorów (3.28).

$$\dot{\xi} = \dot{r} \cos f - r \sin f \dot{f} = v_r \cos f - v_t \sin f.$$

Podstawiając wzory (3.29) otrzymamy

$$\dot{\xi} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f \cos f - \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos f) \sin f = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin f.$$

W podobny sposób różniczkujemy  $\eta$

$$\dot{\eta} = \dot{r} \sin f + r \cos f \dot{f} = v_r \sin f + v_t \cos f = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin^2 f + \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos f) \cos f,$$

i dalej

$$\dot{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\cos f + e (\sin^2 f + \cos^2 f)] = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos f + e).$$

A zatem

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin f, \\ \dot{\eta} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos f + e). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Możemy jeszcze podać wzór dla całkowitej prędkości  $v = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2}$ . Po elementarnych przekształceniach otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + e^2 + 2 e \cos f}. \quad (3.31)$$

Wyprowadzone w tym rozdziale wzory ważne są dla wszystkich orbit niezdegenerowanych. Brakuje w nich istotnej wiadomości o zależności anomalii prawdziwej  $f$  od czasu  $t$ . Problem ten można by rozwiązać drogą całkowania skalarnej całki pól (3.4) z podstawieniem równania orbity (3.21)

$$\frac{df}{dt} = \frac{G}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos f)^2,$$

ale taka całka nie jest łatwa do obliczenia, a poza tym wynik byłby nadal niepełny, pozostawiając wątpliwości na temat ruchu po orbitach zdegenerowanych. Z tych powodów zastosujemy w następnym rozdziale daleko bardziej eleganckie i skuteczniejsze podejście.

## Rozdział 4

# Ruch względny w płaszczyźnie orbity

### 4.1 Orbity eliptyczne

#### 4.1.1 Położenie jako funkcja anomalii mimośrodowej

Zajmijmy się najpierw przypadkiem  $h < 0$ , w którym orbita ma postać elipsy. Jak wiemy z geometrii analitycznej, równanie kanoniczne elipsy w układzie  $O'XY$ , gdzie  $O'$  jest środkiem symetrii elipsy a osie  $X$  i  $Y$  pokrywają się z osiami symetrii, ma postać

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Symbole  $a$  i  $b$  oznaczają odpowiednio półos wielką i półos małą elipsy, przy czym półos mała zależy od mimośrodu  $e$  poprzez

$$b = a \sqrt{1 - e^2}. \quad (4.1)$$

Łatwo można sprawdzić, że równanie kanoniczne jest równoważne równaniom parametrycznym

$$X = a \cos E, \quad Y = b \sin E, \quad (4.2)$$

gdzie parametr  $E$  ma charakter zmiennej kątowej i zmienia się w zakresie od  $0$  do  $2\pi$ . Zauważmy już teraz, że równania (4.2) nie tracą sensu gdy  $e = 1$  i  $Y = 0$ . Nadal opisują wtedy zmiany zmiennej  $X$  od  $X = a$  do  $X = -a$  i dalej do  $X = a$ .

Ponieważ rozpatrujemy zagadnienie w układzie, którego środkiem jest jedno z ognisk elipsy, musimy przejść z  $O'XY$  do nowego układu  $O\xi\eta$ . Przesunięcie środka układu do ogniska  $O$ , wymaga wprowadzenia pojęcia **odległości ogniskowej**

$$c = a e, \quad (4.3)$$



definiowanej jako odległość ogniska elipsy od jej środka symetrii. Równania parametryczne w zmiennych  $\xi$  i  $\eta$  przyjmują postać

$$\xi = X - c, \quad \eta = Y.$$

Podstawiając (4.3) otrzymujemy wzory na położenie w zmiennych  $\xi$  i  $\eta$

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sin E = b \sin E, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Kąt  $E$ , który parametryzuje te równania nosi nazwę **anomalii mimośrodowej**.

A jak wygląda promień wodzący, czyli odległość między ciałami wyrażona przy pomocy tej anomalii? Z twierdzenia Pitagorasa

$$\begin{aligned} r^2 &= \xi^2 + \eta^2 = a^2(\cos E - e)^2 + a^2(1-e^2)\sin^2 E = \\ &= a^2(\cos^2 E - 2e\cos E + e^2 + \sin^2 E - e^2\sin^2 E) = \\ &= a^2(1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E) = a^2(1 - e\cos E)^2, \end{aligned}$$

a zatem

$$r = a(1 - e\cos E). \quad (4.5)$$

Zauważmy, że odległość jest ograniczoną funkcją  $E$  oscylującą między minimum  $r = a(1 - e) = q$  czyli odległością perycentrum dla  $E = 0$ , a maksymalną wartością

$$Q = a(1 + e), \quad (4.6)$$

osiąganą dla  $E = \pi$  i zwaną **odległością apocentrum**. Termin **apocentrum** oznacza punkt na orbicie w którym odległość między ciałami jest maksymalna i ma wartość skończoną.

#### 4.1.2 Związek między $f$ i $E$

Jak dotąd otrzymaliśmy zestaw wzorów porównywalny z zawartością Rozdz. 3.3.6 w tym sensie, że położenie i prędkość na orbicie mamy uzależnione od pewnego kąta – anomalii prawdziwej lub mimośrodowej. Wzory te są równoważne i można ich użyć do sformułowania bezpośredniego związku między obiema anomaliami. Związek taki można wyprowadzić na przykład poprzez przyrównanie wzorów (3.28) i (4.4)

$$\begin{aligned} r \cos f &= a(\cos E - e), \\ r \sin f &= a\sqrt{1-e^2} \sin E. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dzieląc oba wzory stronami (drugi przez pierwszy) można by łatwo znaleźć  $\operatorname{tg} f$  jako funkcję  $E$ , ale napotkamy wtedy tradycyjny problem wyboru odpowiedniej ćwiartki kąta zależnie od znaku funkcji sinus i cosinus, gdyż

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} f) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Świetnym lekarstwem na tego typu ograniczenia jest używanie funkcji tangens połowy argumentu.

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi}. \quad (4.8)$$

Wybór postaci wzoru (4.8) jest dowolny – zazwyczaj staramy się niedopuszczyć do odejmowania bliskich liczb, co wyklucza użycie  $(1 - \cos \phi)$  w pobliżu  $\phi = 0$  oraz  $(1 + \cos \phi)$  w pobliżu  $\phi = \pi$ .

Skorzystajmy z wzoru (4.8) dla anomalii prawdziwej  $f$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \frac{1 - \cos f}{\sin f} = \frac{r - r \cos f}{r \sin f} = \frac{r - \xi}{\eta}.$$

Dzięki wykonanemu wyżej pomnożeniu licznika i mianownika przez  $r$  możemy wprowadzić do prawej strony wzoru funkcje anomalii mimośrodowej z równań (4.4) i (4.5).

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \frac{r - \xi}{\eta} = \frac{a(1 - e \cos E) - a(\cos E - e)}{a\sqrt{1 - e^2} \sin E} = \frac{1 + e}{\sqrt{1 - e}\sqrt{1 + e}} \frac{1 - \cos E}{\sin E}.$$

Jak widać, pojawił się ułamek prowadzący do tangensa połowy anomalii mimośrodowej i otrzymujemy poszukiwaną zależność

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (4.9)$$

Z wróćmy uwagę na kilka wniosków z tego wzoru:

- Obie anomalie są sobie równe w dwóch przypadkach: gdy  $f = E = 0$  lub gdy  $f = E = \pi$
- Pełen obieg ciała po orbicie odpowiada przyrostowi  $f$  lub  $E$  o kąt  $2\pi$ .
- W zakresie  $-\pi \leq f \leq \pi$  mamy zawsze  $|f| \geq |E|$ .

### 4.1.3 Równanie Keplera i III prawo Keplera

#### Prędkość zmian anomalii mimośrodowej

Poszukamy teraz odpowiedzi na pytanie jak zależy prędkość zmian anomalii mimośrodowej od odległości między ciałami  $r$ . Ponieważ znamy już związki między anomaliami  $E$  i  $f$ , możemy uczynić punktem wyjścia

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{df} \frac{df}{dt}. \quad (4.10)$$

Skalarna całka pól (3.4) dostarcza nam informacji o prędkości kątovej  $\dot{f}$

$$\frac{df}{dt} = \frac{G}{r^2} = \frac{\mu p}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{r^2}. \quad (4.11)$$

W kolejnych etapach przekształceń tego wzoru skorzystaliśmy z definicji  $G = \sqrt{\mu p}$  (3.20) oraz  $p = a(1 - e^2)$  (3.23).

Jeśli zaś chodzi o drugi czynnik, to wystarczy połączyć dwie definicje promienia wodzącego (3.21) i (4.5), gdyż

$$\frac{dE}{df} = \frac{dE}{dr} \frac{dr}{df} = \frac{\frac{dr}{df}}{\frac{dr}{dE}}. \quad (4.12)$$

Różniczkowanie odpowiednich wzorów dla  $r$  prowadzi do

$$\frac{dr}{df} = \frac{d}{df} \left[ \frac{p}{1 + e \cos f} \right] = \frac{-p}{(1 + e \cos f)^2} (-e \sin f) = \frac{r^2}{p} e \sin f, \quad (4.13)$$

$$\frac{dr}{dE} = \frac{d[a(1 - e \cos E)]}{dE} = a e \sin E. \quad (4.14)$$

A zatem, łącząc (4.10), (4.11), (4.13) i (4.14), otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)} r^2}{r^2} \frac{e \sin f}{p a e \sin E} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} \frac{\sin f}{a \sin E}.$$

Z równań (4.7) wiemy, że

$$\sin f = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin E}{r},$$

więc

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{r},$$

czyli, ostatecznie,

$$\dot{E} = \frac{n a}{r}, \quad (4.15)$$

gdzie symbol  $n$ , zwany **ruchem średnim**, oznacza

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (4.16)$$

Wzór (4.16) wygląda na skromny produkt uboczny równania (4.15), ale wkrótce przekonamy się, że jest jednym z fundamentalnych twierdzeń zagadnienia dwóch ciał.

### Równanie Keplera i anomalia średnia

Prawa strona wzoru (4.15) zależy od odległości  $r$ , która jest znaną funkcją anomalii mimośrodowej  $E$ . Możemy więc pokusić się o znalezienie jawnej zależności  $E$  od czasu. Aby ją znaleźć, posłużymy się wzorami (4.15) i (4.5)

$$\dot{E} = \frac{n a}{r} = \frac{n}{1 - e \cos E}.$$

Jest to równanie różniczkowe dopuszczające rozdzielenie zmiennych, czyli sprowadzenie do postaci, gdzie każda strona będzie funkcją jednej tylko zmiennej

$$(1 - e \cos E) dE = n dt.$$

Całkowanie tej równości musimy przeprowadzić w określonych granicach – na przykład od momentu przejścia przez perycentrum  $t_p$ , kiedy  $E = 0$ , do dowolnego momentu  $t_1$ , kiedy anomalia mimośrodowa wynosi  $E_1$

$$\int_0^{E_1} (1 - e \cos E) dE = \int_{t_p}^{t_1} n dt.$$

Obydwie całki należą do elementarnych i sprowadzają się do

$$[E - e \sin E]_0^{E_1} = [n t]_{t_p}^{t_1},$$

czyli

$$E_1 - e \sin E_1 = n(t_1 - t_p).$$

W powyższym równaniu możemy opuścić indeks „1”, który wprowadzony został tylko po to, aby nie mieszać zmiennej pod całką z granicą całkowania. Poza tym, widzimy, że prawa strona jest jakimś kątem, który rośnie jednostajnie w miarę wpływu czasu. Ten pomocniczy kąt oznaczymy przez  $M$  i nazwiemy **anomalią średnią**

$$M \stackrel{\text{def}}{=} n(t - t_p). \quad (4.17)$$

Wprowadzając pojęcie anomalii średniej otrzymujemy ostateczną postać związku

$$M = E - e \sin E, \quad (4.18)$$

zwanego **równaniem Keplera**. Uwaga! Równanie Keplera w postaci (4.18) jest prawdziwe tylko wtedy, gdy wszystkie kąty mierzone są w radianach.

Równanie Keplera z anomalią mimośrodową  $E$  jako niewiadomą jest równaniem przestępnym i nie można podać ścisłego wzoru na jego pierwiastek z wyjątkiem kilku sytuacji szczególnych, takich jak podane w poniższej tabeli

| $M$                  | $E$              |
|----------------------|------------------|
| 0                    | 0                |
| $\pi$                | $\pi$            |
| $\frac{1}{2}\pi - e$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
| $\frac{3}{2}\pi + e$ | $\frac{3}{2}\pi$ |

Ostatnie dwa wiersze tabeli są o tyle ważne, że dotyczą sytuacji, w których różnica  $E - M$  jest co do wartości bezwzględnej maksymalna

$$\max |E - M| = e. \quad (4.19)$$

Spośród metod przybliżonych którymi rozwiązujemy równanie Keplera, najprostsza jest metoda iteracji prostych. Wybieramy jako pierwsze przybliżenie  $E_0 = M$  a następnie powtarzamy proces

$$E_{j+1} = M + e \sin E_j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.20)$$

tak długo, aż kolejne dwie wartości  $E_{j+1}$  i  $E_j$  będziemy mogli uznać za identyczne w ramach przyjętego progu dokładności. Proces ten jest zawsze zbieżny dla  $e < 1$  i jest to zbieżność do właściwej granicy, bowiem w przedziale

$$0 \leq M < 2\pi$$

każdej wartości anomalii średniej odpowiada jedna i tylko jedna wartość anomalii mimośrodowej w zakresie  $0 \leq E < 2\pi$ .

### III prawo Keplera

Z równania Keplera (4.18) wynika, że przyrost anomalii mimośrodowej o kąt pełny odpowiada wzrostowi anomalii średniej o  $2\pi$ . Ponieważ anomalia średnia  $M$  jest liniową funkcją czasu, możemy uznać, że ruch średni  $n$  jest średnią prędkością kątową dla ruchu eliptycznego, rozumianą jako  $n = 2\pi/T$ , gdzie  $T$  jest okresem ruchu eliptycznego (przedział czasu między dwoma przejściami przez ten sam punkt orbity).

Weźmy kwadrat ruchu średniego i podstawmy do niego definicję (4.16)

$$n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\mu}{a^3}.$$

Ponieważ  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ , mamy

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(m_1 + m_2)}{4\pi^2}. \quad (4.21)$$

Jest to w istocie klasyczne sformułowanie III prawa Keplera. Jeśli zaniedbamy masy planet w porównaniu z masą słońca  $m_1$ , to stosunek sześciąt pólosi wielkich ich orbit  $a$  do kwadratów okresów obiegu  $T^2$  będzie dla wszystkich planet równy tej samej stałej  $k^2 m_1 / (4\pi^2)$ . Nie tylko wyprowadziliśmy więc III prawo Keplera, ale dodaliśmy mu głębi ujawniając założenia niezbędne do jego poprawności i wiążąc stosunek  $a^3 : T^2$  ze stałą Gaussa i masą Słońca. Ponieważ pojęcie ruchu średniego pojawi się także dla orbit, które nie są okresowe, i będzie miało inną interpretację fizyczną, **uogólnionym III prawem Keplera** nazywamy związek

$$n^2 a^3 = \mu, \quad (4.22)$$

bez odwoływania się do pojęcia okresu obiegu.

#### 4.1.4 Prędkość jako funkcja $E$

Aby znaleźć składowe prędkości jako funkcje  $E$ , musimy użyć pochodnej  $\dot{E}$ , zdefiniowanej wzorem (4.15)

$$\dot{E} = \frac{na}{r}.$$

Możemy wtedy wyznaczyć

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{E} \frac{d\xi}{dE} = \frac{na}{r} (-a \sin E), \\ \dot{\eta} &= \dot{E} \frac{d\eta}{dE} = \frac{na}{r} a \sqrt{1-e^2} \cos E. \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -\frac{na^2}{r} \sin E = -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E}, \\ \dot{\eta} &= \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E = \frac{nb \cos E}{1 - e \cos E}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Składową radialną prędkości otrzymujemy poprzez proste różniczkowanie odległości danej wzorem (4.5)

$$v_r = \dot{r} = \dot{E} \frac{dr}{dE} = \frac{na}{r} (ae \sin E).$$

Składową transwersalną otrzymamy najłatwiej, gdyż wzoru

$$v_t = \frac{\sqrt{\mu p}}{r},$$

prawie nie trzeba przekształcać. Wystarczy wprowadzić III prawo Keplera i definicję  $p$

$$v_t = \frac{\sqrt{(n^2 a^3) a (1 - e^2)}}{r} = \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2}.$$

Wzory dla składowych  $v_r$  i  $v_t$  mają postać

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{na^2}{r} e \sin E = \frac{nae \sin E}{1 - e \cos E}, \\ v_t &= \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} = \frac{nb}{1 - e \cos E}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Całkowita prędkość w ruchu po elipsie jest w takim razie zależna od anomalii mimośrodowej poprzez

$$v = na \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}}.\quad (4.25)$$

Wzór ten łatwo otrzymujemy upraszczając  $v = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2}$ , albo  $v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$ , czy też korzystając z całki siły żywej  $v^2 = 2(-\mu/(2a) + \mu/r)$ .

Jak zinterpretować geometrycznie równania opisujące prędkość? Jeśli potraktować równania (4.23) jako równania parametryczne krzywej zwanej **hodo-  
grafem**, to widzimy, że w przypadku niezdegenerowanym zadają one okrąg o promieniu  $\frac{na}{\sqrt{1 - e^2}}$  i środku w punkcie

$$(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = \left(0, \frac{nae}{\sqrt{1 - e^2}}\right).$$

Jest to jednak łatwiejsze do zaobserwowania, jeśli użyjemy równań (3.30), które mają jawną postać równań parametrycznych okręgu z anomalią prawdziwą  $f$  jako parametrem.

### 4.1.5 Orbity kołowe i prostoliniowe

Na zakończenie opisu ruchu po orbitach eliptycznych, musimy rozpatrzyć dwa przypadki skrajne:  $e = 0$  i  $e = 1$ . Zaczniemy od pierwszego z nich, czyli od tak zwanych orbit kołowych.

Podstawowym problemem związanym z opisem ruchu po orbicie kołowej jest brak wyróżnionego perycentrum. Wystarczy jednak przyjąć umownie dowolny kierunek w płaszczyźnie orbity dla osi  $O\xi$  aby doraźnie zaradzić tej niedogodności. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} r &= a = b = q = Q = p, \\ M &= E = f, \\ v &= v_t = n a. \end{aligned} \tag{4.26}$$

A zatem brak zmian odległości prowadzi do ruchu ze stałą prędkością kątową zgodnie z II prawem Keplera.

Pamiętamy, że dla orbit zdegenerowanych z  $e = 1$  nie można posługiwać się wzorami zależącymi od anomalii prawdziwej  $f$ . Wielką zaletą anomalii mimośrodowej jest to, że wzory wyrażone przy jej użyciu pozostają ważne nawet dla orbit zdegenerowanych. Odległość  $r$  między ciałami opisana jest więc nadal przez (4.5), czyli

$$r = a(1 - \cos E) = 2a \sin^2 \frac{E}{2}. \tag{4.27}$$

Z fizycznego punktu widzenia jest to opis rzutu pionowego, w którym ciało zaczyna ruch od  $r_{\min} = q = 0$  dla  $E = 0$ , wznosi się na wysokość  $r_{\max} = Q = 2a$  dla  $E = \pi$  i opada aż do osiągnięcia  $r = 0$  dla  $E = 2\pi$ . Ściśle rzecz biorąc, powinniśmy jednak ograniczyć rozważania do przedziału  $0 < E < 2\pi$ , z wykluczeniem wartości skrajnych. Powód tego ograniczenia stanie się jasny gdy dojdziemy do opisu prędkości.

Bieżące wartości anomalii mimośrodowej  $E$  obliczmy z równania Keplera (4.18)

$$M = E - \sin E. \tag{4.28}$$

Ponieważ  $e = 1$  oznacza  $b = 0$ , ruch odbywa się wzdłuż osi  $O\xi$ , co widać także z równań (4.4)

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - 1) = -r, \\ \eta &= 0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

więc orbita ma kształt odcinka o długości  $2a$ , położonego na ujemnej półosi  $O\xi$ .

Hodograf orbity prostoliniowej przestaje mieć kształt okręgu, gdyż w świetle równań (4.23) i (4.24)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{na \sin E}{1 - \cos E} = -na \operatorname{ctg} \frac{E}{2} = -v_r, \\ \dot{\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Przypominając przebieg funkcji cotangens dochodzimy do wniosku, że  $\dot{\xi}$  może przybierać wszystkie wartości rzeczywiste, dążąc do  $-\infty$  gdy  $E \rightarrow 0$  oraz do  $+\infty$  gdy  $E \rightarrow 2\pi$ . Hodograf ma więc postać prostej leżącej na osi  $\dot{\xi}$ . Nieskończona wartość prędkości ujawnia osobliwość kolizyjną.

## 4.2 Orbity hiperboliczne

### 4.2.1 Preludium: funkcje hiperboliczne

Rozpatrując orbity hiperboliczne, będziemy musieli posługiwać się **funkcjami hiperbolicznymi**, które nie wchodzą w zakres szkolnych kursów matematyki, więc wymagają osobnego wprowadzenia.

Sinus i cosinus hiperboliczny definiujemy analogicznie do zwyczajnych funkcji trygonometrycznych. Jeśli

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}, \quad (4.31)$$

to

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \quad \sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \quad (4.32)$$

Z porównania tych wzorów widać, że

$$\cos ix = \cosh x, \quad \sin ix = i \sinh x.$$

O ile funkcje sinus i cosinus były ograniczone, to ich hiperboliczne odpowiedniki rosną wykładniczo i dla  $x \gg 1$  mamy

$$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{\exp x}{2},$$

natomiast dla  $x \ll -1$

$$\sinh x \approx -\cosh x \approx -\frac{\exp x}{2}.$$

Wzór jedykowy dla funkcji hiperbolicznych ma postać

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (4.33)$$

Podobnie jak dla funkcji trygonometrycznych wprowadza się

$$\operatorname{tgh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{ctgh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh x}{\sinh x} = (\operatorname{tgh} x)^{-1}. \quad (4.34)$$

Z definicji (4.32) i (4.34) można wydedukować wiele własności funkcji hiperbolicznych. Część z nich podsumowana jest w poniższej tabelce.



| funkcja $F(x)$          | $F'(x)$           | parzystość | $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ | $F(0)$      | $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ |
|-------------------------|-------------------|------------|-------------------------------------|-------------|------------------------------------|
| $\sinh x$               | $\cosh x$         | N          | $-\infty$                           | 0           | $\infty$                           |
| $\cosh x$               | $\sinh x$         | P          | $\infty$                            | 1           | $\infty$                           |
| $\operatorname{tgh} x$  | $(\cosh x)^{-2}$  | N          | -1                                  | 0           | 1                                  |
| $\operatorname{ctgh} x$ | $-(\sinh x)^{-2}$ | N          | -1                                  | $\pm\infty$ | 1                                  |

Warto także wspomnieć o funkcjach odwrotnych, analogicznych do „arcus” ale nazywanych „Area” i dających się wyrazić jawnie przy pomocy logarytmu naturalnego.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \\
 \operatorname{Arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \\
 \operatorname{Artgh} x &= \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad -1 < x < 1.
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

Dla funkcji hiperbolicznych o argumentie będącym sumą dwóch wielkości obowiązują wzory

$$\begin{aligned}
 \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\
 \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.
 \end{aligned}$$

Drugi z nich ma znak plus w odróżnieniu od zwykłego cosinusa sumy kątów. W tej sytuacji tangens hiperboliczny połowy argumentu ma nieco odmienną od (4.8) postać

$$\operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}.
 \tag{4.36}$$

#### 4.2.2 Położenie jako funkcja anomalii mimośrodowej

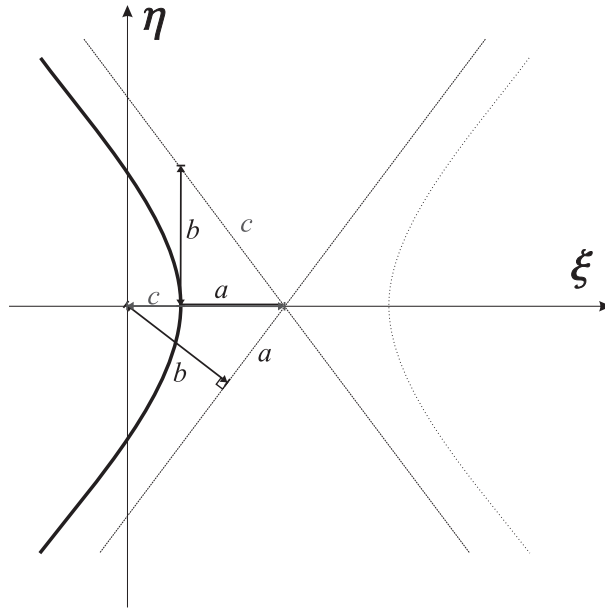
Równanie kanoniczne hiperboli ( $h > 0$ ,  $e \geq 1$ ) w układzie środkowym  $O'XY$  różni się od przypadku eliptycznego znakiem minus

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Symbole, które dla elipsy oznaczały półoś wielką i półoś małą, noszą w przypadku hiperboli nazwy **półoś rzeczywista**  $a$  i **półoś urojona**

$$b = a \sqrt{e^2 - 1},
 \tag{4.37}$$

Nie znaczy to, że  $b$  jest liczbą urojoną, lecz tylko tyle, że gdyby utrzymać w mocy definicję półosi małej elipsy  $b$  z równania (4.1), to przy  $e > 1$  istotnie otrzymalibyśmy urojoną wartość  $b$ . Zauważmy przy okazji, że jeśli  $e > \sqrt{2}$ , to  $b > a$  co dodatkowo uzasadnia niestosowność terminów „półoś wielka” i „półoś mała” w odniesieniu do hiperboli.



Rysunek 4.1: Orbita hiperboliczna.

Równania parametryczne w układzie środkowym są dwuznaczne, gdyż hiperbola posiada dwie gałęzie. A więc, wprowadzając parametr  $E$ ,

$$X = \pm a \cosh E, \quad Y = b \sinh E. \quad (4.38)$$

Wielkość oznaczaną przez  $E$  nazwiemy **anomalią mimośrodową**, ale w odróżnieniu od przypadku eliptycznego, nie jest ona kątem i przebiega wszystkie wartości rzeczywiste  $-\infty < E < \infty$ .

Aby przejść do równania orbity hiperbolicznej, musimy wybrać jedną gałąź krzywej, tę ze znakiem minus, i przesunąć środek układu do jej ogniska. Tak jak dla elipsy, odległość ogniskową, która służy do tego przesunięcia, definiujemy wzorem (4.3), to znaczy  $c = ae$ . Tym razem jednak  $c \geq a$ , gdyż  $e \geq 1$ . Co ciekawe, dla orbit hiperbolicznych

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

tak, jak w twierdzeniu Pitagorasa z odwiecznymi oznaczeniami boków trójkąta.

W układzie ogniskowym  $O\xi\eta$

$$\xi = X + c, \quad \eta = Y,$$

więc równania parametryczne przyjmują postać

$$\begin{aligned} \xi &= a(e - \cosh E), \\ \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E = b \sinh E. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Odległość między ciałami  $r$  znajdziemy poprzez

$$\begin{aligned} r^2 &= \xi^2 + \eta^2 = a^2(e - \cosh E)^2 + a^2(e^2 - 1) \sinh^2 E = \\ &= a^2 (e^2 - 2e \cosh E + \cosh^2 E + (e^2 - 1) \sinh^2 E). \end{aligned}$$

Korzystając z wzoru jedynkowego dla funkcji hiperbolicznych, dochodzimy do

$$r^2 = a^2 (e^2 \cosh^2 E - 2e \cosh E + 1) = a^2 (e \cosh E - 1)^2.$$

Zauważmy, że w odróżnieniu od funkcji trygonometrycznych  $\cosh E \geq 1$ , więc wyrażenie w nawiasie jest nieujemne i nie musimy zmieniać jego znaku, gdy przechodzimy do

$$r = a(e \cosh E - 1). \quad (4.40)$$

### 4.2.3 Anomalia prawdziwa w ruchu hiperbolicznym

Poszukajmy teraz związku między anomalią mimośrodową  $E$  i prawdziwą  $f$  analogicznego do (4.9). Skoro

$$\begin{aligned} r \cos f &= a(e - \cosh E), \\ r \sin f &= a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E, \end{aligned} \quad (4.41)$$

to

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \frac{r - \xi}{\eta} = \frac{a(e \cosh E - 1) - a(e - \cosh E)}{a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E} = \frac{e + 1}{\sqrt{e - 1}\sqrt{e + 1}} \frac{\cosh E - 1}{\sinh E}.$$

Przywołując (4.36) dochodzimy do

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \operatorname{tgh} \frac{E}{2}. \quad (4.42)$$

Podobieństwo tego związku do (4.9) jest powierzchowne i mylące. Przypomnijmy, że tangens hiperboliczny jest funkcją ograniczoną, dążącą asymptotycznie do 1 lub  $-1$ . Jeśli więc  $E \rightarrow \infty$ , to

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}},$$

a to oznacza, że

$$f_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}}. \quad (4.43)$$

Z kolei dla  $E \rightarrow -\infty$

$$\lim_{E \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} \frac{f}{2} = -\sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}},$$

a więc

$$f_{\min} = -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} = -f_{\max},$$

rozpatrując anomalię prawdziwą w zakresie  $-\pi < f \leq \pi$ .

Widzimy więc, że anomalia prawdziwa w ruchu hiperbolicznym zmienia się jedynie w zakresie wyznaczonym przez asymptoty hiperboli, przy czym  $f_{\max}$  jest zawsze kątem większym niż  $\frac{\pi}{2}$  a mniejszym lub równym  $\pi$ .

#### 4.2.4 Równanie Keplera

Wyprowadzenie wzoru dla  $\dot{E}$  dla orbity hiperbolicznej wygląda niemal identycznie jak przedstawione w Rozdziale 4.1.3. Dwie drobne różnice, to użycie  $p = a(e^2 - 1)$ , oraz

$$\frac{dr}{dE} = \frac{d[a(e \cosh E - 1)]}{dE} = a e \sinh E, \quad (4.44)$$

zamiast (4.14). Wynik wygląda jednak identycznie jak dla orbit eliptycznych, to znaczy

$$\dot{E} = \frac{na}{r}, \quad (4.45)$$

gdzie ruch średni  $n$  definiujemy nadal jako

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Uogólnione III prawo Keplera dla orbit hiperbolicznych ma więc postać  $n^2 a^3 = \mu$ , choć nie możemy już wiązać  $n$  z okresem obiegu, bo ruch hiperboliczny nie jest okresowy.

Aby otrzymać jawną zależność anomalii mimośrodowej od czasu, całkujemy równanie różniczkowe powstające z (4.45) i (4.40)

$$\dot{E} = \frac{na}{r} = \frac{n}{e \cosh E - 1},$$

metodą rozdzielania zmiennych

$$(e \cosh E - 1) dE = n dt.$$

Dolną granicą całkowania jest moment przejścia przez perycentrum  $t_p$ , kiedy  $E = 0$ , a górną – dowolny moment  $t_1$ , kiedy anomalia mimośrodkowa wynosi  $E_1$

$$\int_0^{E_1} (e \cosh E - 1) dE = \int_{t_p}^{t_1} n dt.$$

Elementarne całki prowadzą do

$$[e \sinh E - E]_0^{E_1} = [n t]_{t_p}^{t_1},$$

czyli

$$e \sinh E_1 - E_1 = n(t_1 - t_p).$$

Przypominając definicję anomalii średniej (4.17) i opuszczając indeks „1” otrzymujemy **równanie Keplera dla orbit hiperbolicznych**

$$M = e \sinh E - E. \quad (4.46)$$

Zauważmy, że mimo formalnego podobieństwa definicji  $M = n(t - t_p)$  do przypadku eliptycznego, ani anomalia średnia ani mimośrodkowa nie są kątami.

Równanie Keplera w przypadku hiperbolicznym jest również przestępne i wymaga użycia metod przybliżonych w celu znalezienia  $E$ . Rozwiązując je metodą iteracji prostych musimy jednak zmodyfikować postać (4.18) i iterować wzór

$$E_{j+1} = \operatorname{Arsinh} \left( \frac{M + E_j}{e} \right), \quad (4.47)$$

gdź tylko w tej postaci uzyskamy zbieżność ciągu  $\{E_j\}$ . Niestety, zbieżność tego procesu jest bardzo kiepska dla wartości mimośrodów niewiele większych od 1. Z tego względu lepiej posłużyć się metodą Newtona, która prowadzi do schematu

$$E_{j+1} = \frac{M + e(E_j \cosh E_j - \sinh E_j)}{e \cosh E_j - 1}. \quad (4.48)$$

### 4.2.5 Prędkość i hodograf

Skoro podobnie jak dla elipsy

$$\dot{E} = \frac{na}{r},$$

to pochodne zmiennych  $\xi$  i  $\eta$  względem czasu otrzymamy poprzez

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{E} \frac{d\xi}{dE} = \frac{na}{r} (-a \sinh E), \\ \dot{\eta} &= \dot{E} \frac{d\eta}{dE} = \frac{na}{r} a \sqrt{e^2 - 1} \cosh E. \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{na^2}{r} \sinh E = -\frac{na \sinh E}{e \cosh E - 1}, \\ \dot{\eta} &= \frac{na^2}{r} \sqrt{e^2 - 1} \cosh E = \frac{nb \cosh E}{e \cosh E - 1}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Różniczkując (4.40) otrzymamy składową radialną prędkości

$$v_r = \dot{r} = \dot{E} \frac{dr}{dE} = \frac{na}{r} (ae \sinh E),$$

natomiast składową transwersalną, podobnie jak dla orbit eliptycznych, z ogólnego wzoru

$$v_t = \frac{\sqrt{\mu p}}{r},$$

który tym razem przybiera postać

$$v_t = \frac{\sqrt{(n^2 a^3) a (e^2 - 1)}}{r} = \frac{na^2}{r} \sqrt{e^2 - 1}.$$

Wzory dla składowych  $v_r$  i  $v_t$  orbity hiperbolicznej mają więc postać

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{na^2}{r} e \sinh E = \frac{na e \sinh E}{e \cosh E - 1}, \\ v_t &= \frac{na^2}{r} \sqrt{e^2 - 1} = \frac{nb}{e \cosh E - 1}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Całkowita prędkość w ruchu po elipsie jest w takim razie zależna od anomalii mimośrodowej poprzez

$$v = n a \sqrt{\frac{e \cosh E + 1}{e \cosh E - 1}}. \quad (4.51)$$

Zauważmy, że gdy  $E \rightarrow \pm\infty$  to odległość  $r$  dąży do nieskończoności

$$\lim_{E \rightarrow \pm\infty} r = \lim_{E \rightarrow \pm\infty} a(e \cosh E - 1) = \infty. \quad (4.52)$$

Ale nawet w nieskończoności całkowita prędkość nie spada do zera

$$\lim_{E \rightarrow \pm\infty} v = n a \lim_{E \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{e \cosh E + 1}{e \cosh E - 1}} = n a \lim_{E \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{e + \cosh^{-1} E}{e - \cosh^{-1} E}} = n a.$$

A zatem jednym z parametrów ruchu po orbicie hiperbolicznej jest tzw. **prędkość w nieskończoności**

$$v_\infty = n a = \sqrt{\frac{\mu}{a}}. \quad (4.53)$$

Ponieważ prędkość transwersalna w nieskończoności dąży do zera, prędkość  $v_\infty$  jest skierowana radialnie.

Dla niezdegenerowanych orbit hiperbolicznych hodograf ma nadal postać okręgu, ale niepełnego. Wiąże się to z ograniczeniem zakresu anomalii prawdziwej  $f$  parametryzującej okrąg. Na wykresie można zauważyć, że odległość środka okręgu od początku układu  $\xi, \eta$ , równa  $e n a^2/b$ , jest większa niż promień okręgu  $n a^2/b$  i rzeczywiste zmiany prędkości obejmują wycinek okręgu ograniczony stycznymi poprowadzonymi ze środka układu.

## 4.2.6 Zdegenerowane orbity hiperboliczne

### Orbity prostoliniowe $e = 1$

Jeśli moment pędu jest równy zero a stała energii  $h$  jest dodatnia, to mamy do czynienia ze zdegenerowanymi orbitami hiperbolicznymi o mimośrodku  $e = 1$ . Tradycyjnie możemy wtedy korzystać z wzorów zależnych od anomalii mimośrodowej. Dla położeń

$$\begin{aligned} \xi &= a(1 - \cosh E) = -r, \\ \eta &= 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

A zatem orbita ma kształt półprostej, położonej na lewej półosi  $\xi$  z wykluczeniem  $\xi = 0$  jako punktu odpowiadającego kolizji. Dla prędkości

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{n a \sinh E}{\cosh E - 1} = -v_r, \\ \dot{\eta} &= v_t = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Hodograf ma więc postać dwóch półprostych  $|\dot{\xi}| > n a = v_\infty$ , z wewnętrznymi punktami odpowiadającymi nieskończonej odległości. Równanie Keplera ma postać

$$M = \sinh E - E, \quad (4.56)$$

i rozwiązujemy je podobnie jak dla orbit niezdegenerowanych.

### Orbity prostoliniowe $e \rightarrow \infty$

Istnieje także druga możliwość degeneracji orbity hiperbolicznej: gdy  $e \rightarrow \infty$ , orbita przybiera postać prostej **prostopadłej** do wektora Laplace'a. Wymaga to nieskończonej prędkości, więc nie będziemy poświęcać więcej uwagi temu przypadkowi. Warto jednak o nim wiedzieć, gdyż czasem orbity o bardzo dużym mimośrodku przybliża się odcinkiem prostej – na przykład przy opisie przejścia gwiazd w pobliżu Słońca.

## 4.3 Orbity paraboliczne

### 4.3.1 Położenie i odległość

Specyfika orbit parabolicznych jest to, że nie trzeba dla nich wprowadzać anomalii mimośrodowej. Zamiast tego, posługujemy się pomocniczą zmienną

$$D = \operatorname{tg} \frac{f}{2}. \quad (4.57)$$

Przy jej pomocy możemy przedstawić szczególny przypadek wzoru (3.21) z mimośrodem  $e = 1$  oraz  $p = 2q$ , jako

$$r = \frac{p}{1 + \cos f} = \frac{p}{2 \cos^2(f/2)} = q (1 + D^2). \quad (4.58)$$

Współrzędne kartezjańskie wyrażone przy pomocy  $D$  przybierają postać

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos f = q (1 - D^2), \\ \eta &= r \sin f = 2qD. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Równania (4.59) definiują parabolę

$$\xi = -\frac{1}{4q} \eta^2 + q, \quad (4.60)$$

z osią symetrii  $\xi$  i gałęziami skierowanymi w lewo. Odwracając rozumowanie można stwierdzić, że orbitą zagadnienia dwóch ciał nie może być każda parabola a tylko taka, która jest symetryczna względem osi  $\xi$  i ma wyróżnik  $\Delta = 1$ . Tylko wtedy ognisko wypadnie w środku układu współrzędnych.

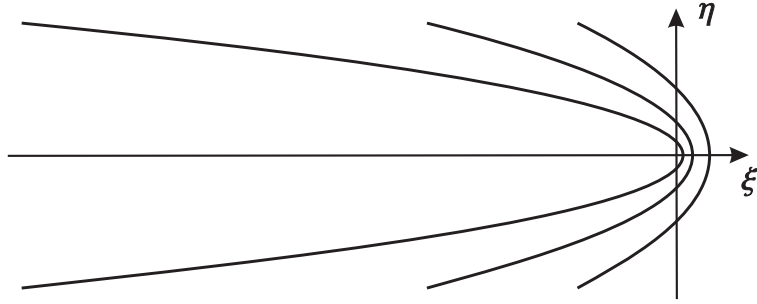
### 4.3.2 Równanie Barkera

Zależność zmiennej  $D$  od czasu można znaleźć bez trudu. Zaczniemy zróżniczkowania defincji (4.57)

$$\dot{D} = \frac{\dot{f}}{2 \cos^2(f/2)} = \frac{r}{p} \dot{f}. \quad (4.61)$$

Z drugiej storny, pochodna  $f$  spełnia skalarną całkę pól (4.11)

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.$$



Rysunek 4.2: Rodzina orbit parabolicznych z różnymi wartościami  $q$ .

A zatem, łącząc oba wzory

$$\dot{D} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} r^{-1} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{p}{r}.$$

Wprowadźmy teraz ruch średni poprzez III prawo Keplera dla ruchu parabolicznego

$$n^2 p^3 = \mu, \quad (4.62)$$

oraz dokonajmy rozdzielania zmiennych w powstałym równaniu

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2n}{1+D^2}. \quad (4.63)$$

Związek

$$\frac{1}{2} (1 + D^2) dD = n dt,$$

wycałkujemy w granicach od momentu przejścia przez perycentrum  $t_p$ , gdy  $D = 0$ , do bieżącej epoki  $t_1$ , której odpowiada wartość  $D_1$

$$\frac{1}{2} \int_0^{D_1} (1 + D^2) dD = \int_{t_p}^{t_1} n dt,$$

co prowadzi do prostego równania algebraicznego

$$\frac{D^3}{6} + \frac{D}{2} = n(t - t_p). \quad (4.64)$$

Jest to **równanie Barkera** będące parabolicznym odpowiednikiem równania Keplera. W odróżnieniu od równania Keplera, (4.64) jest równaniem algebraicznym trzeciego stopnia i posiada ściśle rozwiązanie. Aby znaleźć  $D$  (a więc i  $f$ ) obliczamy najpierw anomalię średnią  $M$  (która nie jest kątem!) a następnie pomocniczą wielkość  $\sigma$

$$M = n(t - t_p), \quad (4.65)$$

$$\sigma = \left( \sqrt{1 + 9M^2} - 3M \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.66)$$



po czym

$$D = \frac{1 - \sigma^2}{\sigma}. \quad (4.67)$$

### 4.3.3 Prędkość w ruchu parabolicznym

Różniczkując wzory (4.59) względem anomalii mimośrodowej  $D$  a następnie uwzględniając  $\dot{D} = np/r$  z równania (4.63), otrzymujemy składowe prędkości

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{np^2}{r} D = -4nq \frac{D}{1+D^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{np^2}{r} = 4nq \frac{1}{1+D^2}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Ciekawą własnością ruchu parabolicznego jest

$$v_r = -\dot{\xi}, \quad v_t = \dot{\eta}, \quad (4.69)$$

co łatwo można sprawdzić albo poprzez bezpośrednie różniczkowanie wzoru (4.58), albo podstawiając  $e = 1$  do równań (3.29) i (3.30).

Prędkość całkowita  $v = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2}$  wynosi

$$v = \frac{2np}{\sqrt{1+D^2}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \quad (4.70)$$

Druga część tego wzoru znana jest jako definicja tzw. **drugiej prędkości kosmicznej**, znanej także jako prędkość ucieczki lub prędkość paraboliczna. Jest to minimalna prędkość jaką należy nadać ciału w odległości  $r$  od drugiej masy, aby mogło ono oddalić się w nieskończoność. Inne orbity otwarte (orbity hiperboliczne) mają większą wartość stałej energii  $h > 0$  a więc posiadają większą niż (4.70) prędkość w tej samej odległości  $r$  niż paraboliczna orbita z  $h = 0$ .

Hodograf orbity parabolicznej ma przejściową między ruchem eliptycznym a hiperbolicznym postać okręgu bez punktu  $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$  wymagającego  $D = \pm\infty$ .

W ten sposób zakończyliśmy analizę wszystkich możliwych typów ruchu w płaszczyźnie orbity względnego zagadnienia dwóch ciał, z pominięciem przypadku zdegenerowanych, prostoliniowych orbit parabolicznych.

## Rozdział 5

# Przestrzenne zagadnienie względne

W poprzednim rozdziale rozpatrywaliśmy ruch względny dwóch ciał w płaszczyźnie  $\zeta = 0$  układu współrzędnych perycentrycznych  $O\xi\eta\zeta$ . Możliwe to było dzięki istnieniu całek pól prowadzących do wniosku, że orbita jest albo krzywą płaską albo leży na prostej. Obecnie zajmiemy się opisem ruchu w kartezjańskim układzie  $Oxyz$ , którego środek znajduje się w punkcie materialnym  $m_1$  – tak, jak w układzie  $O\xi\eta\zeta$  – ale osie mogą mieć dowolnie wybraną orientację. Układ  $Oxyz$  nazywać będziemy krótko „układem dowolnym”.

### 5.1 Całki ruchu zagadnienia względnego w dowolnym układzie współrzędnych

Równania ruchu zagadnienia względnego mają w układzie dowolnym postać (2.16) czyli po rozpisaniu na współrzędne

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3},\end{aligned}\tag{5.1}$$

gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , natomiast  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ .

O kształcie i orientacji przestrzennej orbity decydują wartości siedmiu stałych ruchu  $h$ ,  $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)^T$  i  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$ , które poznaliśmy w Rozdziale 3. Wartości te wyliczamy z następujących całek ruchu:

1. Całka siły żywej (energii) dana równaniem (3.2)

$$h = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r}.\tag{5.2}$$

2. Całki pól (momentu pędu) dane równaniami (3.3)

$$\begin{aligned} G_1 &= y \dot{z} - z \dot{y}, \\ G_2 &= z \dot{x} - x \dot{z}, \\ G_3 &= x \dot{y} - y \dot{x}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

3. Całki Laplace'a (3.14)

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\mu} (\dot{y} G_3 - \dot{z} G_2) - \frac{x}{r}, \\ e_2 &= \frac{1}{\mu} (\dot{z} G_1 - \dot{x} G_3) - \frac{y}{r}, \\ e_3 &= \frac{1}{\mu} (\dot{x} G_2 - \dot{y} G_1) - \frac{z}{r}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

Przypomnijmy, że wektor momentu pędu  $\mathbf{G}$  jest normalny do płaszczyzny orbity, więc jego współrzędne  $G_1$ ,  $G_2$  i  $G_3$  mogą posłużyć do określenia położenia płaszczyzny  $O\xi\eta$  w układzie dowolnym. Wiąże się z nim pojęcie **linii węzłów**. Jeśli orbita niezdegenerowana przecina **płaszczyznę podstawową**  $Oxy$  w jednym lub w dwóch punktach, to punkty te nazywamy **węzłami orbity**. Jeśli w danym węźle prędkość  $\dot{z} > 0$ , to węzeł nazywamy **wstępującym**, a jeśli  $\dot{z} < 0$ , to mówimy o węźle **zstępującym**. Orbity zamknięte mają zawsze dwa węzły, natomiast orbity otwarte mogą mieć jeden lub dwa węzły – zależnie od orientacji względem płaszczyzny podstawowej. Prosta przechodzącą przez co najmniej jeden z węzłów i środek  $O$  układu współrzędnych nazywamy **linią węzłów**. Jeśli istnieją dwa węzły, to linia węzłów przechodzi przez oba węzły i środek  $O$ . Inaczej można zdefiniować linię węzłów jako prostą wyznaczoną przez przecięcie płaszczyzny normalnej do  $\mathbf{G}$  (płaszczyzny orbity) i płaszczyzny podstawowej  $Oxy$ . Z oczywistych względów linia węzłów nie istnieje gdy  $\mathbf{G} = (0, 0, G_3)^T$ , czyli gdy płaszczyzna orbity pokrywa się z płaszczyzną podstawową. Wektor skierowany do węzła wstępującego możemy otrzymać poprzez iloczyn wektorowy

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{G}}. \tag{5.5}$$

Mimo, że użyliśmy dwóch wersorów, wektor  $\mathbf{m}$  nie jest jednostkowy (z wyjątkiem sytuacji, gdy  $\hat{\mathbf{z}} \perp \hat{\mathbf{G}}$ ). Użycie  $\hat{\mathbf{G}}$  ma nam przypominać, że wektor ten nie istnieje gdy  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ . Natomiast dla  $\hat{\mathbf{z}} \parallel \hat{\mathbf{G}}$  mamy  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ , więc nie pokazuje on żadnego kierunku.

Wektor Laplace'a  $\mathbf{e}$  wskazuje położenie osi  $O\xi$  w przestrzeni. Wiąże się z nim pojęcie **linii apsyd** czyli prostej przechodzącej przez ognisko  $O$  i perycentrum orbity niezdegenerowanej. Jeśli mamy do czynienia z orbitą eliptyczną, to na linii apsyd leży także apocentrum. Krótko mówiąc: linia apsyd to prosta na której leży wektor Laplace'a  $\mathbf{e}$  i z całek Laplace'a wynika, że ma ona trwałą orientację w przestrzeni. Linia apsyd nie istnieje gdy  $e = 0$ .

## 5.2 Macierz orientacji w ujęciu wektorowym

Wektory  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{G}$  mogą posłużyć do zdefiniowania transformacji z układu dowolnego do perycentrycznego. Ponieważ znamy już wzory na współrzędne wektorów położenia i prędkości w układzie perycentrycznym, musimy teraz zmierzyć się z problemem transformacji współrzędnych wektora przy zmianie bazy.

Zacznijmy od określenia wersorów układu perycentrycznego. Oś  $O\xi$  skierowana jest do perycentrum czyli wzdłuż wektora Laplace'a; możemy więc przyjąć  $\hat{\xi} = \hat{\mathbf{e}}$ . Oś  $O\zeta$  skierowana jest wzdłuż wektora momentu pędu  $\mathbf{G}$ , czyli  $\hat{\zeta} = \hat{\mathbf{G}}$ . Układ jest ortogonalny i prawoskrętny, więc wersor osi  $O\eta$  możemy otrzymać poprzez iloczyn wektorowy dwóch pozostałych:  $\hat{\eta} = \hat{\zeta} \times \hat{\xi}$ . Dla ekonomii zapisu, wprowadzimy pomocniczy wektor, zwany czasem wektorem Hamiltona,

$$\mathbf{B} = \mathbf{G} \times \mathbf{e}. \quad (5.6)$$

On też jest całką ruchu, ale w pełni zależną od pozostałych. Wykorzystamy go jedynie do uzupełnienia związku między całkami ruchu a wersorami układu perycentrycznego:

$$\hat{\xi} = e^{-1} \mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}, \quad \hat{\eta} = B^{-1} \mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\zeta} = G^{-1} \mathbf{G} = \hat{\mathbf{G}}. \quad (5.7)$$

Wersory układu dowolnego oznaczymy odpowiednio przez  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  oraz  $\hat{\mathbf{z}}$ .

Ten sam wektor położenia  $\mathbf{r}$  można przedstawić w dwóch bazach jako

$$\mathbf{r} = \xi \hat{\xi} + \eta \hat{\eta} + \zeta \hat{\zeta}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.9)$$

Współrzędne (zwane także składowymi) wektora w danej bazie otrzymujemy poprzez rzuty na odpowiednie wersory. W naszym przypadku

$$\xi = \mathbf{r} \cdot \hat{\xi}, \quad \eta = \mathbf{r} \cdot \hat{\eta}, \quad \zeta = \mathbf{r} \cdot \hat{\zeta}, \quad (5.10)$$

oraz

$$x = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad y = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{y}}, \quad z = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.11)$$

Jeśli chcemy znaleźć związek między współrzędnymi w obu bazach, to powinniśmy zastosować wzór (5.11) używając wektora  $\mathbf{r}$  w postaci (5.8) albo na odwrót – połączyć wzory (5.10) i (5.9). Rozpatrzmy wariant pierwszy, co prowadzi do

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}} = (\xi \hat{\xi} + \eta \hat{\eta} + \zeta \hat{\zeta}) \cdot \hat{\mathbf{x}} = (\hat{\xi} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \xi + (\hat{\eta} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \eta + (\hat{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \zeta, \\ y &= \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{y}} = (\xi \hat{\xi} + \eta \hat{\eta} + \zeta \hat{\zeta}) \cdot \hat{\mathbf{y}} = (\hat{\xi} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \xi + (\hat{\eta} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \eta + (\hat{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \zeta, \\ z &= \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}} = (\xi \hat{\xi} + \eta \hat{\eta} + \zeta \hat{\zeta}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = (\hat{\xi} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \xi + (\hat{\eta} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \eta + (\hat{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \zeta. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\xi} \cdot \hat{x} & \hat{\eta} \cdot \hat{x} & \hat{\zeta} \cdot \hat{x} \\ \hat{\xi} \cdot \hat{y} & \hat{\eta} \cdot \hat{y} & \hat{\zeta} \cdot \hat{y} \\ \hat{\xi} \cdot \hat{z} & \hat{\eta} \cdot \hat{z} & \hat{\zeta} \cdot \hat{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Od tego momentu będziemy używać rachunku wektorowego we współrzędnych. Rachunek wektorowy w formie czystej polega na stosowaniu równań ważnych w dowolnej bazie. W rachunku współrzędnych operujemy w konkretnej bazie. Z tego powodu musimy stosować dwa różne symbole dla tego samego wektora  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}_{xyz} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

dla wektorów z lewej i prawej strony równania (5.12). W tym zapisie, równanie (5.12) przyjmuje zwartą postać

$$\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{N} \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta}. \quad (5.14)$$

Macierz kwadratowa  $\mathbf{N}$  nosi nazwę macierzy przekształcenia pasywnego (pasywnego, bo wektor jest tam gdzie był, tylko zmieniła się baza). Nazywana jest także **macierzą orientacji** układu  $O\xi\eta\zeta$ . Jeśli przyjrzymy się dokładnie jej postaci w równaniu (5.12), to zauważymy, że pierwsza kolumna  $\mathbf{N}$  jest to wersor  $\hat{\xi} = \hat{e}$  wyrażony w bazie  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  czyli, przez analogię z (5.13),  $\hat{e}_{xyz}$ . Podobnie jest z drugą i trzecią kolumną, które odpowiadają wersorom  $\hat{\mathbf{B}}_{xyz}$  i  $\hat{\mathbf{G}}_{xyz}$ . Pozwala to zapisać macierz przekształcenia w postaci blokowej Przyjmując

$$\mathbf{N} = \left( \hat{e} \mid \hat{\mathbf{B}} \mid \hat{\mathbf{G}} \right)_{xyz}. \quad (5.15)$$

Wystarczy więc, że wyliczymy w dowolnym układzie współrzędnych wektory Laplace'a i momentu pędu (a z nich wektor Hamiltona), by móc podać wszystkie elementy macierzy orientacji  $\mathbf{N}$ . Dla pewności wypiszmy jawnie elementy tej macierzy

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{e_1}{e} & \frac{G_2 e_3 - G_3 e_2}{Ge} & \frac{G_1}{G} \\ \frac{e_2}{e} & \frac{G_3 e_1 - G_1 e_3}{Ge} & \frac{G_2}{G} \\ \frac{e_3}{e} & \frac{G_1 e_2 - G_2 e_1}{Ge} & \frac{G_3}{G} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Ponieważ wszystkie wektory tworzące kolumny są stałymi ruchu, to także macierz orientacji jest stała i różniczkując (5.14) względem czasu otrzymujemy wzory dla przekształcenia wektora prędkości

$$\mathbf{v}_{xyz} = \mathbf{N} \mathbf{v}_{\xi\eta\zeta}. \quad (5.17)$$

Musimy jeszcze zająć się transformacją odwrotną

$$\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{M} \mathbf{r}_{xyz}, \quad (5.18)$$

oraz

$$\mathbf{v}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{M} \mathbf{v}_{xyz}. \quad (5.19)$$

Jak wiemy z algebry liniowej, transformacji odwrotnej do (5.14) powinna odpowiadać macierz odwrotna do  $\mathbf{N}$ , czyli  $\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-1}$ . Odwracanie macierzy nie jest w ogólności zabiegiem błyskawicznym, ale w tym szczególnym wypadku daje się przeprowadzić bez trudu. Zauważmy, że iloczyny skalarne dwóch różnych kolumn macierzy  $\mathbf{N}$  dają zero

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{G}} = 0,$$

natomiast kwadraty kolumn mają wartość 1

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{G}} = 1,$$

To znaczy, że macierz orientacji  $\mathbf{N}$  jest macierzą ortogonalną, a więc jej odwrotność równa jest transpozycji

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}^T \\ \hat{\mathbf{B}}^T \\ \hat{\mathbf{G}}^T \end{pmatrix}_{xyz}. \quad (5.20)$$

Przedstawiona postać wektorowa macierzy orientacji jest wygodna obliczeniowo i uniwersalna. Jedyne dwa ograniczenia dla jej stosowalności to  $e = 0$  lub  $G = 0$ , gdyż wtedy nie można wyznaczyć wersorów  $\hat{\mathbf{e}}$  lub  $\hat{\mathbf{G}}$ .

### 5.3 Opis macierzy orientacji przy pomocy kątów Eulera

Układy  $Oxyz$  i  $O\xi\eta\zeta$  mają wspólny środek, jednakową skrętność, obydwa są ortogonalne i używamy w nich jednakowej jednostki odległości. Oznacza to, że przekształcenie dowolnego wektora z bazy  $(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\zeta}})$  do  $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$  sprowadza się do obrotu wokół środka  $O$ . Macierz orientacji  $\mathbf{N}$  jest więc macierzą obrotu.

Mimo prostoty i elegancji, wyrażenie macierzy obrotu przy pomocy zadanych wersorów posiada także pewne wady. Zauważmy na przykład pewną „rozrzutność”. Macierz kwadratową trzeciego stopnia określa jej 9 elementów. W naszym wypadku macierz jest ortogonalna, więc jedną kolumnę (na przykład wersor  $\mathbf{B}$ ) możemy otrzymać poprzez iloczyn wektorowy pozostałych dwóch, co redukuje liczbę niezależnych elementów do sześciu. Te dwie kolumny muszą być ortogonalne i każda z nich musi mieć normę (długość) równą 1, co daje trzy związki w postaci iloczynów skalarnych. Jak widać, do określenia macierzy ortogonalnej powinny wystarczyć trzy elementy z dziewięciu. Zamiast zadawać trzy wybrane elementy macierzy obrotu i z nich wyliczać resztę, o wiele lepiej jest wyrazić wszystkie elementy przy pomocy trzech parametrów zwanych **kątami Eulera**. Dowolny obrót można przedstawić jako złożenie trzech kolejnych

obrotów wokół osi układu współrzędnych, zaś kąty Eulera to kąty obrotu wokół kolejnych osi. Należy jednak zachować ostrożność i nie mylić obrotu aktywnego (obrót wektora) z obrotem pasywnym (obrót układu współrzędnych).

### 5.3.1 Obrót aktywny i pasywny

Obrót aktywny wokół osi układu współrzędnych realizujemy przy pomocy **macierzy obrotu aktywnego**

$$\bar{\mathbf{R}}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

gdzie kąt obrotu  $\varphi$  mierzony jest prawoskrętnie. Dokładniej mówiąc, w zakresie  $0 < \varphi < \pi$ , iloczyn wektorowy (wektor przed obrotem)  $\times$  (wektor obrócony) musi być skierowany zgodnie z wersorem osi obrotu. Zauważmy, że dla każdej z tych macierzy

$$\bar{\mathbf{R}}_i(-\varphi) = \bar{\mathbf{R}}_i^T(\varphi) = \bar{\mathbf{R}}_i^{-1}(\varphi).$$

Przykładem obrotu aktywnego niech będzie ruch orbitalny w układzie perycentrycznym. W epoce  $t_p$  wersor położenia ciała  $\hat{\mathbf{r}}$  skierowany jest do perycentrum (anomalii prawdziwej wynosi 0). W epoce  $t'$  jego położenie  $\hat{\mathbf{r}}'$  zadane jest anomalią prawdziwą  $f$  i mamy do czynienia z ruchem jako obrotem aktywnym wokół osi  $O\zeta$ . A zatem, w bazie orbitalnej perycentrycznej

$$\hat{\mathbf{r}}'_{\xi\eta\zeta} = \bar{\mathbf{R}}_3(f)\hat{\mathbf{r}}_{\xi\eta\zeta}, \quad (5.24)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{r}}_{\xi\eta\zeta} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\xi\eta\zeta} = (1, 0, 0)^T$  zgodnie z przyjętym założeniem (epoka  $t_p$ ). W porównaniu z przekształceniem pasywnym (5.14), mamy oba wektory – po lewej i po prawej – wyrażone tej samej bazie (dolna etykieta jest jednakowa:  $\xi\eta\zeta$ ). Natomiast są to dwa różne wektory, stąd dodany „prim”. Możemy sprawdzić, że rzeczywiście

$$\frac{1}{r'} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos f & -\sin f & 0 \\ \sin f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obrót pasywny wektora przedstawia się inaczej. Wybieramy jedną z osi układu współrzędnych (na przykład  $O\zeta$  z wersorem  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$  i obracamy aktywnie o

kąt  $\varphi$  wokół niej pozostałe dwie osie ( $O\xi$  i  $O\eta$  z wektorami  $\hat{\xi}$  i  $\hat{\eta}$ ). W ten sposób powstaje nowy układ  $O\xi'\eta'\zeta'$  z wektorami bazowymi

$$\hat{\xi}'_{\xi\eta\zeta} = \bar{\mathbf{R}}_3(\varphi)\hat{\xi}_{\xi\eta\zeta}, \quad \hat{\eta}'_{\xi\eta\zeta} = \bar{\mathbf{R}}_3(\varphi)\hat{\eta}_{\xi\eta\zeta}, \quad \hat{\zeta}'_{\xi\eta\zeta} = \bar{\mathbf{R}}_3(\varphi)\hat{\zeta}_{\xi\eta\zeta} = \hat{\zeta}_{\xi\eta\zeta}.$$

Ale z punktu widzenia obserwatora związanego z układem primowanym, to wektory  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\eta}$ , które wcześniej pokrywały się z primowanymi, obróciły się w stronę przeciwną:

$$\hat{\xi}'_{\xi'\eta'\zeta'} = \bar{\mathbf{R}}_3(-\varphi)\hat{\xi}'_{\xi'\eta'\zeta'}, \quad \hat{\eta}'_{\xi'\eta'\zeta'} = \bar{\mathbf{R}}_3(-\varphi)\hat{\eta}'_{\xi'\eta'\zeta'}.$$

Wektor

$$\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = (\xi, \eta, \zeta)^T,$$

ma w układzie  $O\xi'\eta'\zeta'$  współrzędne

$$\mathbf{r}_{\xi'\eta'\zeta'} = (\xi', \eta', \zeta')^T,$$

takie, jakby wykonano na nim obrót o kąt  $-\varphi$ , to znaczy

$$\mathbf{r}_{\xi'\eta'\zeta'} = \bar{\mathbf{R}}_3(-\varphi)\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta}.$$

Mówimy, że w wyniku aktywnego obrotu układu o kąt  $\varphi$  wektor  $\mathbf{r}$  doznał obrotu pasywnego o kąt  $\varphi$  (czyli pozornego obrotu aktywnego o kąt  $-\varphi$ ). Przy takiej terminologii, wprowadzamy **macierze obrotu pasywnego**

$$\mathbf{R}_i(\varphi) = \bar{\mathbf{R}}_i(-\varphi).$$

Obrotom pasywnym wokół osi układu współrzędnych odpowiadają podstawowe macierze

$$\mathbf{R}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{R}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{R}_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

gdzie  $\varphi$  jest kątem aktywnego obrotu układu współrzędnych, który powoduje obrót pasywny wektora. Tego właśnie obrotu aktywnego dotyczy reguła dodatniego kierunku zmian kąta  $\varphi$  w macierzach pasywnych  $\mathbf{R}_i(\varphi)$ .

Podobnie jak dla macierzy obrotu aktywnego, mamy

$$\mathbf{R}_i^{-1}(\varphi) = \mathbf{R}_i(-\varphi) = \mathbf{R}_i^T(\varphi).$$

Warto także zauważyć, że macierz obrotu o kąt zerowy jest macierzą jednostkową trzeciego stopnia

$$\mathbf{R}_i(0) = \bar{\mathbf{R}}_i(0) = \mathbf{I}_3, \quad (5.28)$$



oraz że iloczyn dwóch macierzy tego samego typu prowadzi do

$$\mathbf{R}_i(\varphi_1) \mathbf{R}_i(\varphi_2) = \mathbf{R}_i(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (5.29)$$

Pamiętajmy także, że jeśli  $i \neq j$ , to

$$\mathbf{R}_i(\varphi_1) \mathbf{R}_j(\varphi_2) \neq \mathbf{R}_j(\varphi_2) \mathbf{R}_i(\varphi_1).$$

Obydwa powyższe wzory obowiązują także dla macierzy obrotu aktywnego.

Podsumujmy: Mamy dwa układy współrzędnych  $Oxyz$  i  $Ox'y'z'$  takie, że obrót aktywny wersorów  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  o kąt  $\varphi$  przeprowadza je w wersory  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ , czyli  $\hat{x}'_{xyz} = \bar{\mathbf{R}}_j(\varphi)\hat{x}_{xyz}$  i podobnie dla pozostałych. Jeśli znamy współrzędne wektora  $\mathbf{r}$  w układzie  $Oxyz$ , czyli  $\mathbf{r}_{xyz}$ , a chcemy znaleźć współrzędne  $\mathbf{r}$  w układzie  $Ox'y'z'$ , czyli  $\mathbf{r}_{x'y'z'}$ , to stosujemy wzór dla obrotu pasywnego

$$\mathbf{r}_{x'y'z'} = \mathbf{R}_j(\varphi) \mathbf{r}_{xyz}. \quad (5.30)$$

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, dowolny obrót w przestrzeni (aktywny lub pasywny) można przedstawić jako złożenie obrotów wokół trzech osi układu współrzędnych (dodajmy, że co najmniej dwie z nich muszą być różne). Stwarza to wiele możliwości. Najpopularniejsza w astronomii prowadzi do kątów Eulera typu 3-1-3: najpierw obrót wokół osi „trzeciej” (np.  $Oz$ ), następnie wokół osi „pierwszej” i znowu wokół osi „trzeciej”.

Składając obroty musimy uważać na specyfikę obrotu aktywnego i pasywnego i na to, co się kryje za kolejnymi iloczynami. Wykonując kilka kolejnych obrotów aktywnych przy użyciu macierzy  $\bar{\mathbf{R}}_j$ , obracamy wektor cały czas wokół osi tego samego układu współrzędnych. Obrót pasywny wymaga innej interpretacji: wynik pierwszego obrotu to współrzędne w nowej bazie, więc kolejny obrót nastąpi wokół jednej z osi nowego układu współrzędnych. Przyjrzymy się temu bliżej realizując kolejne obroty pasywne z układu dowolnego do orbitalnego.

### 5.3.2 Obroty podstawowe

#### Pierwszy obrót typu 3 - długość węzła wstępującego

Odwrotnie niż w rozdziale 5.2, punktem wyjścia jest teraz układ dowolny  $Oxyz$  w którym mamy dane współrzędne wektora  $\mathbf{r}_{xyz}$ . Pierwszym krokiem w drodze do układu perycentrycznego będzie wyrażenie współrzędnych w nowym układzie  $Ox'y'z'$ , który ma tę samą płaszczyznę podstawową ale oś  $Ox'$  skierowana jest do węzła wstępującego. Inaczej mówiąc,  $\hat{x}' = \hat{m}$ , gdzie wektor  $\mathbf{m}$  zdefiniowaliśmy równaniem (5.5). Będzie to więc obrót aktywny układu wokół osi  $Oz$  o kąt  $\Omega$  zwany **długością węzła wstępującego**. Jest to kąt mierzony w płaszczyźnie  $Oxy$  od kierunku podstawowego wyznaczonego przez wersor  $\hat{x}$  do wektora  $\mathbf{m}$  wskazującego węzeł wstępujący orbity. Zgodnie z (5.30), związany z tym obrót pasywny wektora  $\mathbf{r}$  o kąt  $\Omega$  daje w nowym układzie współrzędne

$$\mathbf{r}_{x'y'z'} = \mathbf{R}_3(\Omega) \mathbf{r}_{xyz}.$$

### Obrót typu 1 - nachylenie

Rozpatrujemy teraz wektor  $\mathbf{r}$  w układzie  $Ox'y'z$ , gdzie ma on współrzędne  $\mathbf{r}_{x'y'z}$ . W sytuacji, gdy oś  $Ox'$  pokrywa się z linią węzłów, możemy łatwo przejść do układu  $Ox'y''\zeta$ , którego dwie pierwsze osie leżą w płaszczyźnie orbity, a co za tym idzie – oś  $O\zeta$  pokrywa się z wektorem momentu pędu  $\mathbf{G}$ . W tym celu należy obrócić układ  $Ox'y'z$  wokół osi  $Ox'$  o kąt  $I$  zawarty między osią  $Oz$  a wektorem momentu pędu  $\mathbf{G}$ . Kąt ten nazywamy **nachyleniem orbity**. Obrót pasywny o kąt  $i$  powoduje, że w nowym układzie wektor  $\mathbf{r}$  ma współrzędne

$$\mathbf{r}_{x'y''\zeta} = \mathbf{R}_1(I) \mathbf{r}_{x'y'z} = \mathbf{R}_1(I) \mathbf{R}_3(\Omega) \mathbf{r}_{xyz}.$$

### Drugi obrót typu 3 - argument perycentrum

Pozostaje już tylko uzgodnienie osi układu  $Ox'y''\zeta$  z kierunkiem do perycentrum orbity. Kąt  $\omega$  zawarty między kierunkiem do węzła wstępującego (wektorem  $\mathbf{m}$ ) a kierunkiem do perycentrum (wektorem Laplace'a  $\mathbf{e}$ ) nazywamy **argumentem perycentrum**. Obracając układ  $Ox'y''\zeta$  wokół osi  $O\zeta$  o kąt  $\omega$  otrzymujemy perycentryczny układ orbitalny  $O\xi\eta\zeta$ , w którym wektor  $\mathbf{r}$  ma współrzędne

$$\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{R}_3(\omega) \mathbf{r}_{x'y''\zeta} = \mathbf{R}_3(\omega) \mathbf{R}_1(I) \mathbf{R}_3(\Omega) \mathbf{r}_{xyz}. \quad (5.31)$$

W ten sposób przedstawiliśmy transformację z układu dowolnego do układu orbitalnego przy użyciu trzech kątów Eulera typu 3-1-3:  $\Omega - I - \omega$ . Długość węzła wstępującego i argument perycentrum są kątami przybierającymi wartości z pełnego zakresu od 0 do  $2\pi$ . Natomiast nachylenie orbity jest kątem ograniczonym do przedziału obustronnie domkniętego  $I \in [0, \pi]$ . Jeśli  $I \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ , to mówimy o orbitach prostych, a gdy  $I \in (\frac{1}{2}\pi, \pi]$ , to mówimy o orbitach wstecznych. Orbity z nachyleniem  $I = \frac{1}{2}\pi$  nazywamy biegunowymi.

Porównując wzory (5.18) i (5.31) możemy wyrazić macierz orientacji  $\mathbf{M}$  przy pomocy kątów Eulera

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_3(\omega) \mathbf{R}_1(I) \mathbf{R}_3(\Omega). \quad (5.32)$$

Wykonując odpowiednie iloczyny macierzy i oznaczając

$$s = \sin I, \quad c = \cos I, \quad (5.33)$$

otrzymamy jawną postać

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - c \sin \omega \sin \Omega & \cos \omega \sin \Omega + c \sin \omega \cos \Omega & s \sin \omega \\ -\sin \omega \cos \Omega - c \cos \omega \sin \Omega & -\sin \omega \sin \Omega + c \cos \omega \cos \Omega & s \cos \omega \\ s \sin \Omega & -s \cos \Omega & c \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Pamiętając o ortogonalności macierzy obrotu, możemy otrzymać macierz transformacji odwrotnej  $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$  albo wykonując iloczyn

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_3(-\Omega) \mathbf{R}_1(-I) \mathbf{R}_3(-\omega), \quad (5.35)$$

albo bezpośrednio transponując macierz (5.34), gdyż w myśl (5.20) i zasady podwójnej transpozycji  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ , mamy

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^T. \quad (5.36)$$

Dodajmy jeszcze ważny komentarz. Macierz  $\mathbf{N}$ , jako macierz obrotu pasywnego przy zmianie bazy orbitalna  $\rightarrow$  dowolna, jest zarazem macierzą operacji odwrotnej, czyli obrotu aktywnego, który przeprowadza na przykład wektor  $\hat{x}$  w wektor  $\hat{\xi}$ . Jeśli przyjrzymy się równaniu

$$\hat{\xi} = \mathbf{N}\hat{x} = \bar{\mathbf{R}}_3(\Omega) \bar{\mathbf{R}}_1(I) \bar{\mathbf{R}}_3(\omega)\hat{x},$$

i pamiętamy, że operacje odczytujemy od prawej do lewej, to zauważymy, że:

- pierwszy obrót aktywny, o kąt  $\omega$ , następuje wokół osi  $Oz$ ,
- drugi obrót, o kąt  $I$ , nastąpi wokół osi  $Ox$  (wektor opuści płaszczyznę podstawową),
- trzeci obrót, o kąt  $\Omega$ , następuje znowu wokół osi  $Oz$  i koniec wektora porusza się po kole małym sfery, równoległym do  $Oxy$ .

Jak widać, jest to sytuacja geometrycznie zupełnie odmienna niż obrót pasywny.

### 5.3.3 Wektory $G$ i $e$ a kąty Eulera

Warto zauważyć, że z porównania wzorów (5.20) i (5.34) otrzymujemy natychmiast wyrażenia wektorów  $\hat{G}$  i  $\hat{e}$  przy pomocy kątów Eulera. Możemy więc wyrazić wektor Laplace'a  $e$  w układzie  $Oxyz$  jako

$$\mathbf{e}_{xyz} = e \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - c \sin \omega \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega + c \sin \omega \cos \Omega \\ s \sin \omega \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

natomiast wektor momentu pędu ma składowe

$$\mathbf{G}_{xyz} = G \begin{pmatrix} s \sin \Omega \\ -s \cos \Omega \\ c \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

przy czym, jak pamiętamy,  $G = \sqrt{\mu p}$ .

#### Przypadki szczególne

Jeśli  $I = 0$  lub  $I = \pi$ , to nie istnieje węzeł wstępujący i kąty  $\Omega$  oraz  $\omega$  stają się nieokreślone, tracąc geometryczny sens. Dla  $G = 0$  żaden z kątów Eulera nie jest poprawnie określony. Jeśli zaś  $e = 0$ , to nieokreślony staje się kąt  $\omega$ .

Wiele problemów związanych z nieokreślonymi kątami można obejść przy użyciu prostych środków zaradczych, które przedstawimy w dalszej części wykładu.

## 5.4 Elementy keplerowskie orbity

Jak już wiemy, orientację orbity w przestrzeni określają trzy kąty Eulera 3-1-3: długość węzła wstępującego  $\Omega$ , nachylenie  $I$  oraz argument perycentrum  $\omega$ . Natomiast położenie i prędkość ciała na orbicie zadane są przez trzy wielkości: anomalie średnią  $M$ , mimośród  $e$  oraz – do wyboru – półoś orbity  $a$ , jej parametr  $p$  lub odległość perycentrum  $q$ .<sup>1</sup>

A zatem położenie i prędkość na **orbicie keplerowskiej**, czyli orbicie będącej rozwiązaniem zagadnienia dwóch ciał, w dowolnym układzie współrzędnych o środku w ognisku orbity zadane są przez 6 wielkości, z których 5 to stałe, a jedna – anomalie średnia  $M$  – jest liniową funkcją czasu. Zauważmy jednak, że wystarczy podać wartość anomalii średniej  $M_0$  w określonym momencie czasu („epoce początkowej”)  $t_0$ , a wtedy III prawo Keplera pozwoli nam na wyliczenie z  $a$  lub  $(p, e)$  ruchu średniego  $n$  a następnie wartości jaką  $M$  przybiera w dowolnej chwili  $t$

$$M = n(t - t_p) = n(t - t_0) + M_0. \quad (5.39)$$

Widzimy więc, że jeśli znamy sześć stałych i moment czasu  $t_0$ , to na podstawie znanych wzorów zagadnienia dwóch ciał potrafimy znaleźć położenie i prędkość na orbicie keplerowskiej w dowolnej epoce  $t$ . Innymi słowy, sześć stałych i epoka początkowa jednoznacznie zadają **ruch keplerowski**. Liczby 6+1 nie pojawiły się przypadkiem: rozwiązywaliśmy przecież zagadnienie Cauchyego dla układu równań ruchu szóstego rzędu (2.18), a to wymaga zadania sześciu warunków początkowych  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$  i  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$  dla pewnej epoki początkowej  $t_0$ . Z tych sześciu warunków początkowych wyliczamy poprzez całki ruchu sześć niezależnych stałych ruchu, które nazywamy **elementami keplerowskimi orbity**. Niestety, trzeba przyznać, że podanie ściślejszej definicji elementów keplerowskich – o ile w ogóle możliwe – nie jest łatwe, gdyż istnieje zbyt wiele sytuacji wyjątkowych. Tym niemniej, najczęściej spotykany zestaw elementów keplerowskich to

$$\mathcal{E}_1 = \{a, e, I, \Omega, \omega, M(t_0) = M_0\},$$

ważny dla niezdegenerowanych orbit eliptycznych (oprócz kołowych) lub hiperbolicznych, z nachyleniem różnym od 0 i  $\pi$ . Używając  $q$  lub  $p$  zamiast  $a$ , na przykład

$$\mathcal{E}_2 = \{q, e, I, \Omega, \omega, M(t_0) = M_0\},$$

możemy opisać niezdegenerowany, niepłaski i niekołowy ruch po niezdegenerowanych orbitach eliptycznych, parabolicznych lub hiperbolicznych. Podkreślić należy, że epoka początkowa  $t_0$  nie jest elementem keplerowskim orbity. Należy więc potraktować jako nieformalny żargon często spotykane zaliczanie epoki przejścia przez perycentrum  $t_p$  w poczet elementów keplerowskich. Podanie  $t_p$  zamiast anomalii średniej epoki początkowej  $M_0$  należy rozumieć następująco: szóstym elementem keplerowskim jest  $M(t_p) = 0$ .

Zapamiętajmy:

<sup>1</sup>Zależnie od typu orbity niektóre z tych ostatnich wielkości mogą nie być zdefiniowane, jak  $a$  dla paraboli, lub niejednoznaczne, jak by to miało miejsce w przypadku podania  $p = 0$  i  $e = 1$  (to może oznaczać dowolną orbitę zdegenerowaną – elipsę, parabolę lub hiperbolę).

Elementy orbity to stałe ruchu. Anomalia średnia jest zmienna w czasie, więc nie jest elementem orbity; elementem jest wartość anomalii średniej w wybranej epoce początkowej. Ta epoka nie jest elementem orbity (choć pojawia się pod taką nazwą w wielu pracach).

W sytuacjach szczególnych, gdy  $\mathcal{E}_1$  lub  $\mathcal{E}_2$  tracą matematyczny i geometryczny sens, posługujemy się różnymi alternatywnymi zestawami elementów orbity. Niektórzy autorzy nadal nazywają je elementami keplerowskimi, inni opuszczają przymiotnik „keplerowski” i mówią już tylko o elementach orbity. Dla orbit niezdegenerowanych wprowadza się tak zwane „kąty łamane” mierzone w dwóch różnych płaszczyznach. Poznajmy dwa takie kąty.

1. **Długość perycentrum**  $\varpi$  definiujemy jako „kąt łamany” mierzony dla  $0 < I < \pi$  od osi  $Ox$  do kierunku węzła wstępującego a następnie w płaszczyźnie orbity od węzła do perycentrum

$$\varpi = \omega + \Omega, \quad (5.40)$$

Gdy  $I = 0$  definicja ta przechodzi gładko w „ $\varpi$  jest to kąt między wektorami  $\hat{x}$  i  $e$ ”.

2. **Długość średnią**  $\lambda$  definiujemy dla  $0 \leq I < \pi$  oraz  $e \neq 0$  jako sumę długości perycentrum i anomalii średniej  $M$

$$\lambda = \varpi + M. \quad (5.41)$$

Jeśli  $e = 0$ , to powyższa definicja przechodzi gładko w dwa przypadki szczególne:

- dla  $e = 0$  i  $I \neq 0$ , długość średnia to kąt łamany mierzony najpierw od osi  $Ox$  do węzła wstępującego, a następnie w płaszczyźnie orbity od węzła do promienia wodzącego obiektu na orbicie. Ten drugi kąt zwany jest czasem średnim argumentem szerokości  $F$ , więc możemy napisać

$$\lambda = \Omega + F. \quad (5.42)$$

- dla  $e = I = 0$ , długość średnia to kąt mierzony od osi  $Ox$  do promienia wodzącego obiektu na orbicie.

Dzięki tym kątom możliwe jest wprowadzenie tak zwanych **elementów nieosobliwych**. Jest to sześć stałych ruchu

$$\mathcal{E}_{\text{ns}} = \{a, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \lambda(t_0) = \lambda_0\},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e \cos \varpi, & \eta_1 &= \sin \frac{1}{2} I \cos \Omega, \\ \xi_2 &= e \sin \varpi, & \eta_2 &= \sin \frac{1}{2} I \sin \Omega. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Nazwa „nieosobliwe” jest nieco na wyrost, bo zmienne te są bezużyteczne dla  $I = \pi$  lub dla orbit prostoliniowych, ale faktem jest, że długość średnia epoki

początkowej  $\lambda_0$  jest poprawnie określona zarówno dla orbit kołowych jak i dla  $I = 0$ , a tam, gdzie pozostałe kąty tracą sens, ich wartość jest i tak nieistotna, gdyż odpowiednie elementy nieosobliwe przestają od nich zależeć. Gdy  $I = 0$ , to bez względu na  $\Omega$  mamy poprawnie określone  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , natomiast gdy  $e = 0$ , to przestaje odgrywać rolę wartość  $\varpi$ , gdyż i tak  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ .

Oprócz elementów nieosobliwych stosuje się także **elementy uniwersalne** orbity. Tym razem nazwa jest w pełni uzasadniona, są to bowiem w istocie uniwersalne wielkości: wartości początkowe położeń i prędkości

$$\mathcal{E}_u = \{x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0\}.$$

Algorytmy obliczeń związanych z przejściem  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathcal{E}$  przedstawione są w Dodatkach A i B.

## Rozdział 6

# Barycentryczne zagadnienie dwóch ciał

### 6.1 Separacja ruchów obu mas

W poprzednich rozdziałach rozpatrzyliśmy dogłębnie zagadnienie względne. Potrafimy więc opisać ewolucję względnego wektora położenia  $\mathbf{r}(t)$  i względnej prędkości  $\mathbf{v}(t)$ . Pokażemy teraz, że dzięki całkom barycentrum rozwiązanie zagadnienia względnego może posłużyć do określenia ruchu obydwu mas  $m_1$  i  $m_2$  w dowolnym układzie inercyjnym. Najwygodniejszy będzie układ związany z barycentrum  $B$  obu mas. Osie układu barycentrycznego  $Bx^*y^*z^*$  będą równoległe do odpowiednich osi układu względnego  $Oxyz$ . Gwiazdką oznaczamy będziemy wektory w układzie barycentrycznym.

W barycentrycznym układzie współrzędnych równania ruchu (1.12) przyjmują postać

$$\ddot{\mathbf{r}}_1^* = \frac{k^2 m_2}{(r^*)^3} \mathbf{r}^*, \quad (6.1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2^* = -\frac{k^2 m_1}{(r^*)^3} \mathbf{r}^*, \quad (6.2)$$

gdzie

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}_1^*. \quad (6.3)$$

Położenie środka masy (barycentrum) w układzie barycentrycznym jest oczywiście dane wektorem zerowym. A zatem wzór (2.12) przyjmuje w układzie  $Bx^*y^*z^*$  postać

$$m_1 \mathbf{r}_1^* + m_2 \mathbf{r}_2^* = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Połączenie wzorów (6.3) i (6.4) pozwoli nam na sprowadzenie równań ruchu do postaci zależnych wyłącznie od  $\mathbf{r}_1^*$  lub od  $\mathbf{r}_2^*$ .

Jeśli wyrugujemy z (6.4) wielkość  $\mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}^* + \mathbf{r}_1^*$ , to otrzymamy

$$m_1 \mathbf{r}_1^* + m_2 (\mathbf{r}^* + \mathbf{r}_1^*) = \mathbf{0},$$

czyli

$$\mathbf{r}^* = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_1^*. \quad (6.5)$$

Długość tego wektora wynosi

$$r^* = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1^*. \quad (6.6)$$

Rugując z (6.4) wektor  $\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}^*$ , otrzymamy

$$m_1 (\mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}^*) + m_2 \mathbf{r}_2^* = \mathbf{0},$$

czyli

$$\mathbf{r}^* = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mathbf{r}_2^*, \quad (6.7)$$

a długość tego wektora dana będzie wzorem

$$r^* = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2^*. \quad (6.8)$$

Wystarczy teraz tylko podstawić (6.5) i (6.6) do równań ruchu (6.1), natomiast (6.7) i (6.8) do równań (6.2), aby otrzymać

$$\ddot{\mathbf{r}}_1^* = -\frac{\mu_1}{(r_1^*)^3} \mathbf{r}_1^*, \quad (6.9)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2^* = -\frac{\mu_2}{(r_2^*)^3} \mathbf{r}_2^*, \quad (6.10)$$

gdzie parametry grawitacyjne zostały zdefiniowane jako

$$\mu_1 = \frac{k^2 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}, \quad \mu_2 = \frac{k^2 m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (6.11)$$

Przypomnijmy równania ruchu względnego (2.16)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}.$$

Łatwo zauważyć, że równania (6.9) opisujące ruch masy  $m_1$  względem barycentrum mają identyczną postać jak równania ruchu względnego, więc także ich rozwiązanie będzie identyczne jak w zagadnieniu względnym, o ile tylko zastąpimy  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$  odpowiednim parametrem  $\mu_1$  zdefiniowanym wzorem (6.11). Tak samo równania ruchu (6.10) różnią się od (2.16) czy też (6.9) jedynie oznaczeniami i definicją symboli. A zatem

ruch obu mas względem barycentrum opisany jest takimi samymi wzorami jak ruch względny. Należy jedynie zmodyfikować wartości parametru grawitacyjnego przyjmując  $\mu_1$  lub  $\mu_2$  w miejsce  $\mu$ .



## 6.2 Własności orbit barycentrycznych

Z przeprowadzonej powyżej redukcji płyną ważne wnioski szczegółowe. Większość z nich łatwo sobie uzmysłowić pamiętając, że podczas ruchu, masy  $m_1$ ,  $m_2$  i ich barycentrum  $B$  muszą stale znajdować się na jednej prostej.

1. Orbitsy obu mas w zagadnieniu barycentrycznym są krzywymi stożkowymi z ogniskiem w barycentrum.
2. Orbitsy obu mas leżą w jednej płaszczyźnie i mają wspólną linię apsyd. Ich wektory Laplace'a  $e_1$  i  $e_2$  są jednak skierowane przeciwnie, gdyż  $m_1$  i  $m_2$  muszą stale leżeć po przeciwnych stronach środka masy – także w momencie przejścia przez perycentrum.
3. Stosunek odległości perycentrów obu orbit zależy od stosunku mas. W momencie przejścia perycentrum równanie (6.4) prowadzi do wniosku

$$-m_1 q_1 + m_2 q_2 = 0,$$

a zatem

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (6.12)$$

W odniesieniu do odległości perycentrum w ruchu względnym oznacza to także

$$q_1 + q_2 = q. \quad (6.13)$$

4. Ruchu średnie obu orbit są równe i zgodne z ruchem średnim w zagadnieniu względnym. W przypadku orbit eliptycznych oznacza to wspólny okres obiegu.

$$n_1 = n_2 = n. \quad (6.14)$$

5. Pólosie orbit pozostają w stosunku zależnym od mas. Jeśli ruchy średnie są równe, to obowiązuje III prawo Keplera w trzech postaciach

$$n^2 a_1^3 = \mu_1, \quad n^2 a_2^3 = \mu_2, \quad n^2 a^3 = \mu.$$

A zatem, zarówno dla pólosi wielkich elips jak i dla pólosi rzeczywistych hiperbol mamy

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_2^3}{m_1^3},$$

i ostatecznie

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (6.15)$$

6. Mimośrodowość obu orbit są jednakowe i równe mimośrodkowi orbity względnej

$$e_1 = e_2 = e. \quad (6.16)$$

Wynika to z faktu, że  $a_1 : a_2 = q_1 : q_2$ .

7. Dla pozostałych elementów Keplеровских i anomalii średniej zachodzą związki

$$I_1 = I_2, \quad \Omega_1 = \Omega_2, \quad \omega_1 = \omega_2 + \pi, \quad M_1 = M_2. \quad (6.17)$$

Także pozostałe anomalie są równe dla obu mas.

## Rozdział 7

# Potencjał grawitacyjny

### 7.1 Siły potencjalne

Silę  $\mathbf{F}$  nazywamy **siłą potencjalną** jeżeli można ją otrzymać ze skalarnej funkcji  $V \in \mathbb{R}$ , zwanej **potencjałem**, jako

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad (7.1)$$

gdzie symbolem  $\nabla$  oznaczyliśmy gradient.

Jeśli rozpatrujemy ruch jednego ciała, to do opisu jego położenia wystarcza wektor  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  i wtedy gradient ma postać

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Dopóki mamy do czynienia z jednym ciałem, potencjał jest funkcją położenia tego ciała, czyli  $V = V(\mathbf{r}, t)$ , gdyż potencjał może także jawnie zależeć od czasu. Z drugiej zasady dynamiki wynika wtedy, że dla ciała o masie  $m$

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}, t). \quad (7.3)$$

W przypadku większej ilości ciał, na przykład gdy mamy  $N$  punktów materialnych, potencjał zależy od położenia wszystkich obiektów i wtedy, dla  $i = 1, \dots, N$ ,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad (7.4)$$

gdzie

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i},$$

oznacza gradient względem współrzędnych  $i$ -tego ciała. Należy jednak podkreślić, że dla wszystkich  $i$  używamy jednej i tej samej funkcji  $V$ .

Niestety, w mechanice nieba pojawia się nieco zamętu wywołanego używaniem obok potencjału tak zwanej **funkcji sił**  $U$ , która różni się od  $V$  znakiem

$$U = -V, \quad (7.5)$$

co oznacza, że

$$\mathbf{F} = \nabla U. \quad (7.6)$$

Ponadto, używa się czasami potencjału podzielonego przez masę badanego ciała  $V^* = V/m$  i wtedy

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V^*(\mathbf{r}, t). \quad (7.7)$$

Zauważmy jednak, że tego typu podejście stosować można tylko w przypadku jednego ciała, gdyż próba podobnego przekształcenia równań (7.4) wymagałaby dzielenia  $V$  przez różne masy dla różnych  $i$ , a to jest sprzeczne z wymogiem używania tej samej funkcji dla wszystkich równań ruchu.

## 7.2 Potencjał zagadnienia dwóch ciał

Przypomnijmy równania ruchu pełnego zagadnienia dwóch ciał w dowolnym układzie inercyjnym (1.12) stosując nieco inny zapis

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1 = \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (7.8)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (7.9)$$

gdzie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Łatwo można sprawdzić, że zarówno  $\mathbf{F}_1$  jak i  $\mathbf{F}_2$  otrzymujemy z potencjału

$$V = -\frac{k^2 m_1 m_2}{r}. \quad (7.10)$$

Rzeczywiście, skoro

$$r = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)},$$

to

$$\nabla_1(1/r) = -\frac{1}{2} [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]^{-\frac{3}{2}} 2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(-1) = \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

i analogicznie

$$\nabla_2(1/r) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

A zatem

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla_1 V, \quad \text{i} \quad \mathbf{F}_2 = -\nabla_2 V.$$

Zagadnienie względne dwóch ciał z równaniami ruchu (2.16)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r},$$

posiada potencjał na jednostkę masy

$$V^* = -\frac{\mu}{r}, \quad (7.11)$$

gdzież

$$-\nabla V^* = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}.$$

### 7.3 Potencjał kuli – twierdzenie Newtona

Podamy teraz wzór dla potencjału układu punktu materialnego i kuli o izotropowym rozkładzie masy. Rozpatrywać będziemy kulę o całkowitej masie  $m_k$ , której że gęstość  $\kappa(\rho)$  zależy tylko od odległości  $\rho$  od środka masy kuli, oraz punkt materialny o masie  $m_p$ . Już Newton udowodnił, że przy takich założeniach potencjał układu punkt materialnego i kuli ma postać identyczną z potencjałem zagadnienia dwóch punktów materialnych, to znaczy

$$V_{kp} = -\frac{k^2 m_k m_p}{r}, \quad (7.12)$$

gdzie  $r$  oznacza odległość od środka kuli do punktu materialnego.

Idąc dalej, można we wzorze (7.12) zastąpić punkt materialny drugą izotropową kulą, co pozwala na zasadnicze uogólnienie zagadnienia dwóch ciał.

Wszystkie wzory zagadnienia dwóch ciał pozostają ważne w odniesieniu do ruchu środków mas kul o izotropowym rozkładzie masy.

## Rozdział 8

# Zaburzony ruch keplerowski

### 8.1 Uzmiennianie stałych

Jak wiemy, Wszechświat składa się z więcej niż dwóch ciał i żadne z nich nie jest izotropową kulą. Zapiszmy więc równania ruchu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{P}.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Są to równania względnego zagadnienia dwóch ciał z zaburzeniem – dodatkową siłą (na jednostkę masy)  $\mathbf{P}$  uwzględniającą wpływ „reszty świata”. Równania (8.1) nazywamy równaniami ruchu zaburzonego albo **perturbowanego**. Postawmy pytanie: co się stanie z całkami ruchu zagadnienia względnego pod wpływem siły  $\mathbf{P}$ , czyli **zaburzenia** (perturbacji)? Można podejrzewać, że dotychczasowe stałe ruchu przestaną być stałe. Sprawdźmy to podejrzenie.

#### 8.1.1 Całka siły żywej

Przypomnijmy całkę siły żywej (energii)

$$h = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}}.\tag{8.2}$$

Jeśli wzór ten ma być ważny w zagadnieniu zaburzonym, to oczywiście stała energii  $h$  przestaje być stała i mamy  $\dot{h} \neq 0$ , a dokładniej

$$\dot{h} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{1}{2}}} \right) = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \frac{\mu}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Wstawiając  $\dot{\mathbf{r}}$  i  $\dot{\mathbf{v}}$  z równań (8.1) otrzymamy

$$\begin{aligned}\dot{h} &= \mathbf{v} \cdot \left( -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{P} \right) + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{8.3}$$

### 8.1.2 Całka momentu pędu (pól)

Pochodna względem czasu z wektora momentu pędu  $\mathbf{G}$  prowadzi do równań

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{G}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{P}\right) = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}\end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}. \quad (8.4)$$

### 8.1.3 Całka Laplace'a

Różniczkując definicję całki Laplace'a  $e = \text{const}$  dostaniemy

$$\dot{e} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\mu} \mathbf{v} \times \mathbf{G} - \hat{\mathbf{r}} \right] = \frac{1}{\mu} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{G} + \frac{1}{\mu} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{G}} - \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}.$$

Podstawiając  $\dot{\mathbf{r}}$  i  $\dot{\mathbf{v}}$  z równań ruchu (8.1) dochodzimy do postaci

$$\dot{e} = \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{P} \right) \times \mathbf{G} + \frac{1}{\mu} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{G}} - \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt},$$

a ponieważ jedynym powodem dla którego  $\dot{e} \neq \mathbf{0}$  jest pojawienie się siły  $\mathbf{P}$  i zmienność  $\mathbf{G}$ , pozostaje nam (por. definicja  $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , oraz (8.4))

$$\mu \dot{e} = \mathbf{P} \times \mathbf{G} + \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{P} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{P}). \quad (8.5)$$

Dowód, że reszta wyrazów jest równa  $\mathbf{0}$  został przedstawiony przy omawianiu zagadnienia dwóch ciał.

### 8.1.4 Elementy oskulacyjne

Równania dla  $\dot{h}$ ,  $\dot{\mathbf{G}}$  i  $\dot{e}$ , które otrzymaliśmy są całkiem pouczające. Wynika z nich, że na przykład siła radialna nie wpływa na wektor momentu pędu (stałe pół), a siła prostopadła do prędkości nie zmienia stałej siły żywej  $h$ . Są to jednak sytuacje szczególne i nie sposób znaleźć niezerowego zaburzenia  $\mathbf{P}$ , które by nie wpłynęło na żadną ze stałych ruchu. Uznajemy więc, że w zagadnieniu zaburzonym stałe ruchu zagadnienia dwóch ciał stają się zmienne w czasie.

Jak wiemy, elementy keplerowskie orbity są powiązane ze stałymi ruchu. Ruch keplerowski jest opisany jednoznacznie przez sześć stałych dowolnych, które najczęściej występują w postaci elementów keplerowskich  $\mathcal{E}$ :

$$a, e, I, \omega, \Omega, M_0 = M(t_0).$$

Znamy już wzory definiujące transformację

$$(\mathbf{r}, \mathbf{v})_t \leftrightarrow \mathcal{E}_{t_0},$$

która z jednej strony pozwala wyliczać na dowolny moment czasu  $t$  położenie i prędkość ciała, dla którego podaliśmy elementy keplerowskie  $\mathcal{E}$  w momencie  $t_0$ , a z drugiej – pozwala wyliczyć z położenia i prędkości w momencie  $t$  elementy  $\mathcal{E}$  dla epoki odniesienia  $t_0$ . Ponieważ  $\mathcal{E}$  są stałymi ruchu, to biorąc  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  w dowolnym momencie  $t$  i wyliczając z nich elementy otrzymamy zawsze te same wartości  $\mathcal{E}_{t_0}$ .

Jeśli pojawi się dodatkowa siła i ruch ciała nie jest już ruchem keplerowskim, to nadal możemy wyliczać elementy keplerowskie według znanych już wzorów, ale teraz w każdej epoce  $t$  możemy otrzymać inne wartości elementów  $\mathcal{E}_{t_0}$  dla epoki odniesienia  $t_0$ . Zgodnie z zasadą metody uzmienniania stałych, zaczynamy traktować elementy orbity jako funkcje czasu i nazywamy je **elementami oskulacyjnymi**.

Należy wyraźnie odróżnić dwa momenty czasu pojawiające się w tym opisie. **Epoka oskulacji**  $t$  jest momentem czasu w którym mamy dane położenie i prędkość służące do wyliczenia elementów  $\mathcal{E}$ . Jednym z tych elementów jest **anomalii średnia epoki odniesienia**  $M_0 = M(t_0)$ , którą otrzymujemy „cofając” lub „popychając” wartość anomalii średniej  $M$  z epoki  $t$  do epoki  $t_0$ . Ponieważ uzmienniliśmy stałe, to  $M_0$  może być zmienną i w ogólności dla różnych epok oskulacji  $t_1$  i  $t_2$  będziemy mieli  $M_0(t_1) \neq M_0(t_2)$ . Używamy więc pojęcia  $M_0(t)$  – anomalii średniej epoki odniesienia  $t_0$  dla epoki oskulacji  $t$ . Czasami można uprościć sobie życie przyjmując, że  $t = t_0$ . W przypadku pozostałych elementów nie mamy tego problemu i wystarcza używanie pojęcia epoki oskulacji dla  $a(t), e(t)$ , itd.

Mówiąc najkrócej, elementy oskulacyjne epoki  $t$  to wartości elementów keplerowskich wyliczone z  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  dowolnej trajektorii wzorami pochodzącymi z zagadnienia dwóch ciał. Dowolną trajektorię traktujemy jak orbitę keplerowską o zmiennych w czasie elementach. Czasem używa się też innej, równoważnej definicji: elementy oskulacyjne epoki  $t$ , to elementy keplerowskie orbity po której poruszałoby się ciało, gdyby w tym momencie przestała działać siła zaburzająca.

## 8.2 Równania Gaussa i równania planetarne Lagrange’a

Ponieważ pięć spośród elementów keplerowskich zależy od stałych  $h, \mathbf{G}$  i  $\mathbf{e}$ , to równania (8.3), (8.4) i (8.5) pozwalają na znalezienie równań ruchu opisujących zmiany poszczególnych elementów oskulacyjnych w czasie wywołane zaburzeniem  $\mathbf{P}$ . Noszą one nazwę równań Gaussa. Najprostsze z nich możemy wyprowadzić dla przykładu – będzie to równanie dla oskulacyjnej półosi wielkiej  $a$  w zaburzonym ruchu eliptycznym.

Stała energii  $h$  jest bezpośrednio powiązana z półosią wielką elipsy  $a$  wzorem



$h = -\mu/(2a)$ , a zatem oprócz (8.3) mamy również

$$\dot{h} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{2a} \right) = \frac{\mu}{2a^2} \dot{a}. \quad (8.6)$$

Przyrównując stronami równania (8.3) i (8.6) dochodzimy do pierwszego z równań Gaussa

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \quad (8.7)$$

Pozostałe równania Gaussa to

$$\dot{e} = \frac{1}{\mu a e} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r} + (ap - r^2) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{P}, \quad (8.8)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r \cos(f + \omega)}{\mu p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P}, \quad (8.9)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{r}{\mu p e} \left[ \frac{\sqrt{\mu p}}{r} (\cos E + e) \mathbf{r} - (p + r) \sin f \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{P} - c \dot{\Omega}, \quad (8.10)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(f + \omega)}{s \mu p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P}. \quad (8.11)$$

Do tego dochodzi szóste równanie dla anomalii średniej

$$\dot{M} = n - \frac{1}{n a^2} \left[ 2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} + \sqrt{\mu p} (\dot{\omega} + c \dot{\Omega}) \right], \quad (8.12)$$

lub jeszcze prostsze – dla anomalii prawdziwej

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\omega} - c \dot{\Omega}. \quad (8.13)$$

Przypomnijmy, że  $s = \sin I$ ,  $c = \cos I$ ,  $p = a(1 - e^2)$ , oraz  $n = \sqrt{\mu a^{-3}}$ .

Równania Gaussa są dość skomplikowane. Jeśli jednak siła  $\mathbf{P}$  jest potencjalna i istnieje taki potencjał  $R$  (zwany funkcją perturbacyjną), że

$$\mathbf{P} = -\nabla R,$$

to możemy użyć innej odmiany równań dla elementów oskulacyjnych, zwanych równaniami (planetarnymi) Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{2}{n a} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \dot{e} &= -\frac{\eta}{n a^2 e} \left( \eta \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{n a^2 s \eta} \left( c \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right), \\ \dot{M} &= n + \frac{2}{n a} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\eta^2}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -\frac{1}{na^2} \left( \frac{\eta}{e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{c}{s\eta} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \\ \dot{\Omega} &= -\frac{1}{na^2\eta s} \frac{\partial R}{\partial I}.\end{aligned}$$

Symbol  $\eta$ , który pojawił się w tych równaniach, oznacza

$$\eta = \sqrt{1 - e^2}.$$

Zauważmy, że równania (8.14) rozpadają się na dwie podgrupy: w równaniach dla zmiennych  $a, e, I$  występują jedynie pochodne potencjału względem  $M, \omega, \Omega$  i *vice versa*. Gdyby więc funkcja perturbacyjna  $R$  nie zależała jawnie od czasu ani od kątów  $M, \omega$  i  $\Omega$ , to wtedy elementy  $a, e, I$  byłyby stałe, co z kolei pociągałoby za sobą stałość prędkości kątowych  $M, \dot{\omega}$  i  $\dot{\Omega}$ . W słabszych przypadkach szczególnych mielibyśmy: dla  $\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial M} = 0$  – stałą pólóś wielką  $a$ , zaś dla  $\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial \omega} = 0$  – stałe nachylenie  $I$ .

Na zakończenie, warto uściślić, że podane tu równania Gaussa i Lagrange'a tylko w pięciu przypadkach na sześć dotyczą elementów orbity. Ostatnie z nich opisuje zmiany anomalii średniej  $M$ , a nie anomalii średniej epoki  $M_0$ . Owszem, istnieją także odpowiednie równania dla  $\dot{M}_0$ , ale posługiwanie się nimi wprowadza dodatkową komplikację. W praktyce, znajomość  $M_0(t)$  i tak musi posłużyć do wyliczenia  $M(t)$ , więc przestaniemy na równaniach dla  $\dot{M}$ .

### 8.3 Rachunek zaburzeń i typy perturbacji

Wykraczając poza zagadnienie dwóch ciał stwierdzamy, że niemal każde zaburzenie  $\mathbf{P}$  prowadzi do zagadnienia, którego nie potrafimy rozwiązać w sposób ścisły. Już u zarania mechaniki nieba, kiedy Newton próbował zmierzyć się z zagadnieniem trzech ciał Słońce-Ziemia-Księżyc, okazało się, że skazani jesteśmy na stosowanie metod przybliżonych. W sytuacji, gdy siła  $\mathbf{P}$  jest mała w porównaniu do przyciągania dwóch punktów materialnych, stosujemy metodę kolejnych przybliżeń, zwaną rachunkiem zaburzeń. Jej najprostszy wariant polega na tym, że uznajemy ruch keplerowski  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(t)$ , za przybliżenie zerowe, dzięki czemu zaburzenie  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  staje się jawną funkcją czasu  $\mathbf{P} \approx \mathbf{P}(\mathbf{r}_0(t), \mathbf{v}_0(t), t) = \mathbf{P}(t)$ . Pierwsze przybliżenie otrzymujemy więc jako ruch keplerowski z poprawką wyliczoną przy założeniu, że wartości zaburzającej siły wyliczamy na orbicie keplerowskiej. Poprawkę taką nazywamy **perturbacjami pierwszego rzędu**. Perturbacje wyższych rzędów wyliczamy rozpatrując siłę, która nadal jest jawną funkcją czasu, ale jej wartości wyliczamy zakładając ruch, w którym uwzględniono wcześniej wyliczone poprawki. W tym sensie rachunek zaburzeń realizuje metodę kolejnych przybliżeń, podobnie jak to ma miejsce przy rozwiązywaniu równania Keplera metodami iteracyjnymi. O ile jednak rozwiązując równanie Keplera otrzymujemy coraz dokładniejszą wartość pierwiastka, to w rachunku zaburzeń chcemy otrzymać coraz dokładniejsze funkcje czasu  $\mathbf{r}(t)$  i  $\mathbf{v}(t)$ .

Stosowanie elementów oskulacyjnych upraszcza rachunek zaburzeń, co łatwo zrozumieć, gdyż funkcje  $\mathbf{r}(t)$  i  $\mathbf{v}(t)$  są w ruchu keplerowskim raczej skomplikowane, natomiast elementy orbity są wtedy trywialnymi funkcjami  $a = \text{const}$ ,  $e = \text{const}$ , itd. Jest to jednak uproszczenie okupione dość żmudnym procesem wyrażania zaburzającej siły  $\mathbf{P}$  lub funkcji perturbacyjnej  $R$  poprzez elementy orbity i anomalie średnią. Oczywiście, łatwiej wyrazić poprzez elementy keplerowskie jedną funkcję perturbacyjną  $R$ , wchodzącą do równań planetarnych Lagrange'a, niż sześć prawych stron równań Gaussa. Dla tego też, jeśli tylko  $\mathbf{P}$  jest siłą potencjalną, to stosujemy równania Lagrange'a. W szczególności, każde zaburzenie wywołane siłami grawitacji może być opisane funkcją perturbacyjną, więc na tym przypadku skupimy się w dalszych rozważaniach.

Wyrażona przy pomocy elementów oskulacyjnych i anomalii średniej funkcja perturbacyjna ma postać szeregu

$$R = \sum_{jkmq} A_{jkmq}(a, e, I) \cos(jM + k\omega + m\Omega + \phi_{jkmq}), \quad (8.15)$$

z amplitudami zależnymi od półosi  $a$ , mimośrodru  $e$  i nachylenia  $I$ , oraz argumentem funkcji cosinus będącym kombinacją liniową anomalii średniej  $M$ , argumentu perycentrum  $\omega$  i długości węzła wstępującego  $\Omega$ . Faza  $\phi$  może być stała lub liniowo zależna od czasu. Może ona wynosić  $\pi/2$ , przez co cosinus przechodzi w sinus.

Zgodnie z logiką rachunku zaburzeń, perturbacje pierwszego rzędu w oskulacyjnej półosi wielkiej otrzymamy biorąc pierwsze z równań (8.14)

$$\dot{a} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} = \frac{2}{na} \sum_{jkmq} j A_{jkmq}(a, e, I) \sin(jM + k\omega + m\Omega + \phi_{jkmq}), \quad (8.16)$$

i uznając, że jego prawa strona zależy tylko od stałych elementów  $a_0, e_0, I_0, \omega_0, \Omega_0$ , oraz od liniowej funkcji czasu  $M = n_0 t$ . Dla uproszczenia zakładamy, że  $\phi_{jkmq} = 0$ , więc pomijamy indeks  $q$  przy sumowaniu. W tej sytuacji, równanie (8.16) rozwiązujemy bez trudu

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{n_0 a_0} \int \sum_{jkm} j A_{jkm}(a_0, e_0, I_0) \sin(j n_0 t + k\omega_0 + m\Omega_0) dt = \\ &= a_0 + a_1, \end{aligned} \quad (8.17)$$

gdzie

$$a_1 = -\frac{2}{n_0^2 a_0} \sum_{jkm} A_{jkm}(a_0, e_0, I_0) \cos(j n_0 t + k\omega_0 + m\Omega_0), \quad (8.18)$$

to perturbacje pierwszego rzędu w półosi wielkiej orbity. Zauważmy, że są to wyłącznie perturbacje okresowe, o okresie  $2\pi/n_0$ . Co prawda, dla  $j = 0$  mamy w

fukcji perturbacyjnej wyraz niezależny od  $M$  (a więc stały), ale jego pochodna względem anomalii średniej w prawej stronie (8.16) znika (jest mnożona przez  $j = 0$ ). Perturbacje, w których zależność od czasu pojawia się tylko wewnątrz okresowych funkcji sinus i cosinus nazywamy perturbacjami okresowymi. Jeśli dla ruchu średniego  $n$  ich okres jest porównywalny z  $2\pi/n$  lub krótszy, to mówimy o **perturbacjach krótkookresowych**.

Równanie Lagrange'a dla oskulacyjnej półosi wielkiej jest dość wyjątkowe, gdyż praktycznie wyklucza pojawienie się w pierwszym przybliżeniu innych perturbacji niż krótkookresowe (przy założeniu, że wszystkie  $\phi_{jkmq}$  są stałe lub wolnozmiennie). Legło ono u podstaw twierdzenia Laplace'a o stabilności Układu Słonecznego – twierdzenia, które nie przetrwało próby czasu, gdyż zbyt mało uwagi poświęciło mimośrodom orbit.

Równania dla  $\dot{M}$ ,  $\dot{\omega}$  i  $\dot{\Omega}$  również mają swoją specyfikę, gdyż ich prawe strony mogą zawierać wyrazy funkcji perturbacyjnej  $R$  z indeksem  $j = 0$ , czyli wyrazy stałe z punktu widzenia ruchu keplerowskiego. Wynika to z faktu, że różniczkujemy tam amplitudy  $A$ , a nie argumenty funkcji cosinus. To zaś oznacza, że oprócz wyrazów krótkookresowych pojawią się w anomalii średniej, argumentie perycentrum i długości węzła wstępującego **perturbacje wiekowe**, czyli wyrazy typu  $Ct$ , gdzie  $C$  jest stałą - z założenia mniejszą niż ruch średni  $n$ , gdyż sama funkcja perturbacyjna ma być mała w porównaniu z potencjałem zagadnienia dół ciał. Warto zauważyć, że perturbacje wiekowe w tych trzech elementach powodują jedynie: modyfikację III prawa Keplera, systematyczny obrót linii apsyd w płaszczyźnie orbity i precesję linii węzłów.

Dochodzimy teraz do kłopotliwego aspektu przyjęcia orbity keplerowskiej (stałych elementów) jako pierwszego przybliżenia. We wszystkich oprócz  $\dot{a}$  równaniach, mogą pojawić się wyrażenia typu

$$\dot{\mathcal{E}}' = F(a_0, e_0, I_0) A_{0km} \sin(k\omega_0 + m\Omega_0), \quad (8.19)$$

lub

$$\dot{\mathcal{E}}'' = F(a_0, e_0, I_0) \frac{\partial A_{0km}}{\partial \mathcal{E}'} \cos(k\omega_0 + m\Omega_0), \quad (8.20)$$

gdzie  $\mathcal{E}'$  oznacza  $e$  lub  $I$ ,  $\mathcal{E}''$  oznacza  $\omega$ ,  $\Omega$ , lub  $M$ , zaś  $F$  oznacza odpowiedni czynnik wynikający z równań Lagrange'a. Dopóki uznajemy  $\omega_0$  i  $\Omega_0$  za stałe, otrzymywać będziemy perturbacje wiekowe mnożone przez sinus lub cosinus tych kątów. Jednak ten typ perturbacji jest w istocie niczym więcej, jak wynikiem zbyt uproszczonego modelu wyjściowego ruchu. Gdybyśmy od początku przyjęli, że  $\omega_0$  i  $\Omega_0$  są wolnozmiennymi, liniowymi funkcjami czasu, to całkując (8.19) otrzymamy

$$\mathcal{E}' = -\frac{F(a_0, e_0, I_0) A_{0km}}{k\dot{\omega}_0 + m\dot{\Omega}_0} \cos(k\omega_0 + m\Omega_0),$$

dla mimośrodu i nachylenia. Są to tak zwane **perturbacje długookresowe**. Mają one charakter okresowy, gdyż  $\omega_0$  i  $\Omega_0$  są liniowo zmienne w czasie, lecz ich okres jest znacznie dłuższy niż okres obiegu  $2\pi/n$ , ponieważ zmienność tych

kątów wynika tylko z domyślnie słabych perturbacji. Załóżmy, że skoro częstotliwości w mianowniku są znacznie mniejsze niż ruch średni, to amplituda perturbacji długookresowych powinna być znacznie większa niż dla perturbacji krótkookresowych.

Podsumowując, w typowych sytuacjach zaburzenia potencjalnego mamy:

- perturbacje krótkookresowe w  $a$ ,
- perturbacje krótkookresowe i długookresowe w  $e, I$ ,
- perturbacje krótkookresowe, długookresowe i wiekowe w  $\Omega, \omega, M$ .

W przypadku zaburzeń niepotencjalnych, związanych z rozpraszaniem energii (np. przez opór ośrodka), perturbacje wiekowe mogą wystąpić we wszystkich elementach oskulacyjnych.

## Dodatek A

# Efemeryda keplerowska

Efemerydą nazywamy w astronomii przewidywane teoretycznie wartości położenia lub położenia i prędkości pewnego ciała niebieskiego. Jeśli użyjemy do takiego przewidywania wzorów zagadnienia dwóch ciał, to otrzymujemy **efemerydę keplerowską** tego ciała. Efemerydę keplerowską na dowolny moment czasu  $t$  obliczamy na podstawie podanych elementów orbity wraz z ich epoką początkową  $t_0$  lub  $t_p$  oraz przyjmując znaną wartość parametru grawitacyjnego  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ .

W przypadku typowym, gdy z elementów wynika, że orbita nie jest zdegenerowana, postępujemy według podanego niżej algorytmu.

1. Określamy typ orbity (elipsa, parabola czy hiperbola) na podstawie podanych wartości mimośrod  $e$  i półosi  $a$  lub odległości perycentrum  $q$  (albo parametru  $p$ ).
2. Jeśli orbita jest eliptyczna lub hiperboliczna, a nie znamy półosi  $a$ , to wyliczamy ją wzorem

$$a = \frac{p}{|1 - e^2|} = \frac{q}{1 - e}.$$

Dla orbity parabolicznej wyliczamy  $p = 2q$  lub  $q = p/2$ , zależnie od tego, który element został podany.

3. Wyznaczamy ruch średni  $n$  z odpowiedniej postaci III prawa Keplera:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad \text{dla elipsy lub hiperboli,}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}, \quad \text{dla paraboli.}$$

4. Obliczamy wartość anomalii średniej  $M$  dla epoki  $t$ , korzystając z wzoru

$$M = n(t - t_p) = n(t - t_0) + M_0.$$

Dla orbity eliptycznej normalizujemy  $M$  do zakresu  $0 \leq M < 2\pi$ .

5. Obliczamy wartość anomalii mimośrodowej  $E$  lub zmiennej  $D$  rozwiązując

- równanie Keplera dla elipsy  $M = E - e \sin E$ ,
- równanie Keplera dla hiperboli  $M = e \sinh E - E$ ,
- lub równanie Barkera dla paraboli  $M = \frac{1}{6} D^3 + \frac{1}{2} D$ .

Metoda iteracji prostych dla elipsy:

$$E_{j+1} = M + e \sin E_j.$$

Metoda Newtona dla hiperboli:

$$E_{j+1} = E_j + \frac{M + E_j - e \sinh E_j}{e \cosh E_j - 1}.$$

Wzór ścisły dla paraboli:

$$D = \Delta - \frac{1}{\Delta}, \quad \text{gdzie } \Delta = \left(3M + \sqrt{1 + 9M^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

6. Wyliczamy anomalię prawdziwą  $f = 2 \operatorname{arctg} \Phi$ , gdzie

$$\Phi = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, & \text{dla elipsy,} \\ \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh} \frac{E}{2}, & \text{dla hiperboli,} \\ D, & \text{dla paraboli.} \end{cases}$$

7. Wyznaczamy odległość

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

oraz wartości współrzędnych  $\xi, \eta$  oraz prędkości  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$  w perycentrycznym układzie orbitalnym

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos f, \\ \eta &= r \sin f, \\ \dot{\xi} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin f, \\ \dot{\eta} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos f + e). \end{aligned}$$

8. Transformujemy wektory położenia  $\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = (\xi, \eta, 0)^T$  i prędkości  $\mathbf{v}_{\xi\eta\zeta} = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, 0)^T$  do przyjętego układu współrzędnych wykorzystując argument perycentrum  $\omega$ , nachylenie  $I$  oraz długość węzła wstępującego  $\Omega$ :

$$\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{N} \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta}, \quad \mathbf{v}_{xyz} = \mathbf{N} \mathbf{v}_{\xi\eta\zeta},$$

gdzie

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-I)\mathbf{R}_3(-\omega).$$

W postaci jawnej

$$\begin{aligned} N_{11} &= \cos \omega \cos \Omega - \cos I \sin \omega \sin \Omega, \\ N_{12} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos I \cos \omega \sin \Omega, \\ N_{21} &= \cos \omega \sin \Omega + \cos I \sin \omega \cos \Omega, \\ N_{22} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos I \cos \omega \cos \Omega, \\ N_{31} &= \sin I \sin \omega, \\ N_{32} &= \sin I \cos \omega. \end{aligned}$$

Trzecia kolumna macierzy  $\mathbf{N}$  jest nieistotna.

W ten sposób otrzymujemy  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  w przyjętym układzie współrzędnych dla dowolnego momentu czasu  $t$ .



## Dodatek B

# Elementy orbity z wektorów położenia i prędkości

Jak z podanego wektora położenia  $\mathbf{r}$  i wektora prędkości  $\mathbf{v}$  w danej epoce  $t$  wyliczyć elementy keplerowskie orbity? Zakładamy przy tym, że znane są masy obu ciał, a więc parametr grawitacyjny  $\mu$  przyjmujemy jako wiadomy. Dla uproszczenia zapisu, wszystkie wektory utożsamiamy z ich współrzędnymi w układzie  $Oxyz$ , więc  $\mathbf{r}$  oznacza  $\mathbf{r}_{xyz}$  itd.

1. Ze współrzędnych wektorów  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  wyliczamy odległość  $r$  i prędkość całkowitą  $v$

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

2. Wyliczamy wartości stałych ruchu  $h$ ,  $\mathbf{G}$  i  $\mathbf{e}$  z definicji całek siły żywej

$$h = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r},$$

pól

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix}.$$

i Laplace'a

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{G}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \dot{y}G_3 - \dot{z}G_2 \\ \dot{z}G_1 - \dot{x}G_3 \\ \dot{x}G_2 - \dot{y}G_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. Jeśli  $h \neq 0$ , wyliczmy pól wielką lub rzeczywistą  $a$

$$a = \frac{\mu}{2|h|}.$$

Jeśli zaś  $h = 0$ , to wyliczamy *semilatus* paraboli

$$p = (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2)/\mu.$$

4. Mimośród orbity znajdujemy jako długość wektora Laplace'a

$$e = \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}.$$

5. Jeśli  $G \neq 0$ , to nachylenie orbity  $I$  wyliczamy ze współrzędnych wektora  $\mathbf{G}$

$$c = \cos I = \frac{G_3}{G}, \quad s = \sin I = \frac{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}{G},$$

po czym stosujemy funkcję arccos lub arcsin. Można także zastosować wzór dla tangensa połowy kąta i wyliczać

$$I = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}{G + G_3} = 2 \operatorname{arctg} \frac{G - G_3}{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}.$$

Konkretną postać wzoru wybieramy tak, aby uzyskać optymalną dokładność wyniku.

6. Jeśli otrzymaliśmy wartość  $I \neq 0$  oraz  $I \neq \pi$ , to możemy wyznaczyć długość węzła wstępującego. Ponieważ

$$\sin \Omega = \frac{G_1}{G s}, \quad \cos \Omega = -\frac{G_2}{G s},$$

z wzoru na tangens połowy kąta możemy otrzymać

$$\Omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{G s + G_2}{G_1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{G_1}{G s - G_2}.$$

7. Argument perycentrum można wyznaczyć jeżeli  $s \neq 0$  i  $e \neq 0$ . Z definicji  $e$  mamy wtedy

$$e_3 = e s \sin \omega,$$

Cosinus argumentu perycentrum znajdziemy posługując się dodatkowym wektorem  $\mathbf{G} \times \mathbf{e}$ . Jego rzut na oś  $Oz$  daje

$$G_1 e_2 - G_2 e_1 = G e s \cos \omega.$$

A zatem

$$\sin \omega = \frac{e_3}{e s}, \quad \cos \omega = \frac{G_1 e_2 - G_2 e_1}{G e s}.$$

Korzystając z wzoru dla tangensa połowy kąta otrzymujemy (podstawiając za  $\sin \omega$  i  $\cos \omega$  prawe strony podanych wyżej równań)

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega}.$$

8. Jeśli  $e \neq 0$ , możemy przystąpić do poszukiwania anomalii średniej epoki  $t$ . W tym celu zaczynamy od znalezienia anomalii prawdziwej

$$\cos f = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er} \quad \sin f = \frac{\mathbf{G} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r})}{G e r},$$

a następnie

$$D = \frac{1 - \cos f}{\sin f} = \frac{\sin f}{1 + \cos f},$$

wybierając wariant o lepszej dokładności numerycznej. Dla orbit hiperbolicznych lub eliptycznych

$$f = 2 \operatorname{arctg} D.$$

9. W zależności od typu orbity wyliczamy anomalię średnią  $M$  danej epoki  $t$  następująco:

- **Ruch eliptyczny:** Znajdujemy anomalię mimośrodową

$$E = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} D \right),$$

po czym korzystamy z równania Keplera  $M = E - e \sin E$ .

- **Ruch hiperboliczny:** Anomalię mimośrodową otrzymujemy z wzoru

$$E = 2 \operatorname{Ar} \operatorname{tgh} \left( \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} D \right) = \ln \frac{1+e+D\sqrt{e^2-1}}{1+e-D\sqrt{e^2-1}}.$$

Następnie korzystamy z równania Keplera  $M = e \sinh E - E$ .

- **Ruch paraboliczny:** Równanie Barkera dostarcza nam bezpośrednio

$$M = \left( \frac{D^2}{3} + 1 \right) \frac{D}{2}.$$

10. Jeżeli chcemy znaleźć moment przejścia przez perycentrum tak, aby szóstym elementem była anomalia średnia epoki  $t_p$  równa 0, to wyliczamy ruch średni  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  dla elipsy i hiperboli lub  $n = \sqrt{\mu/p^3}$  dla paraboli i stosujemy wzór

$$t_p = t - \frac{M}{n}.$$

Jeżeli zaś chcemy wyliczyć anomalię średnią  $M_0$  dla epoki  $t_0 \neq t$ , to

$$M_0 = M + n(t_0 - t).$$

W ten sposób skompletowaliśmy sześć elementów keplerowskich orbity. W przypadkach szczególnych, gdy  $e = 0$  lub  $s = 0$ , algorytm można łatwo zmodyfikować aby posłużył do wyliczenia elementów nieosobliwych.

# Spis treści

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Zagadnienie dwóch ciał – wiadomości wstępne</b>              | <b>1</b>  |
| 1.1      | Prawo grawitacji . . . . .                                      | 1         |
| 1.2      | Stała Gaussa . . . . .  | 2         |
| 1.3      | Równania ruchu zagadnienia dwóch ciał . . . . .                 | 3         |
| 1.4      | Dodatek: prędkość radialna i transversalna . . . . .            | 5         |
| <b>2</b> | <b>Całki barycentrum i redukcja do zagadnienia względnego</b>   | <b>6</b>  |
| 2.1      | Całki pierwsze równań ruchu . . . . .                           | 6         |
| 2.2      | Całki barycentrum . . . . .                                     | 7         |
| 2.3      | Względne zagadnienie dwóch ciał . . . . .                       | 9         |
| <b>3</b> | <b>Całki ruchu zagadnienia względnego</b>                       | <b>11</b> |
| 3.1      | Całka siły żywej (energii) . . . . .                            | 11        |
| 3.2      | Całki pól . . . . .   | 12        |
| 3.2.1    | Wektorowe całki pól (momentu pędu) . . . . .                    | 12        |
| 3.2.2    | Całka pól w postaci skalarnej i II prawo Keplera . . . . .      | 13        |
| 3.3      | Całki Laplace’a . . . . .                                       | 15        |
| 3.3.1    | Wyprowadzenie . . . . .   | 15        |
| 3.3.2    | Związki całek Laplace’a z pozostałymi całkami ruchu . . . . .   | 16        |
| 3.3.3    | Całki Laplace’a a I prawo Keplera . . . . .                     | 17        |
| 3.3.4    | Stała energii a kształt orbity . . . . .                        | 19        |
| 3.3.5    | Orbity zdegenerowane (prostoliniowe) . . . . .                  | 20        |
| 3.3.6    | Położenie i prędkość jako funkcja anomalii prawdziwej . . . . . | 20        |
| <b>4</b> | <b>Ruch względny w płaszczyźnie orbity</b>                      | <b>23</b> |
| 4.1      | Orbity eliptyczne . . . . .                                     | 23        |
| 4.1.1    | Położenie jako funkcja anomalii mimośrodowej . . . . .          | 23        |
| 4.1.2    | Związek między $f$ i $E$ . . . . .                              | 24        |
| 4.1.3    | Równanie Keplera i III prawo Keplera . . . . .                  | 25        |
| 4.1.4    | Prędkość jako funkcja $E$ . . . . .                             | 28        |
| 4.1.5    | Orbity kołowe i prostoliniowe . . . . .                         | 30        |
| 4.2      | Orbity hiperboliczne . . . . .                                  | 31        |
| 4.2.1    | Preludium: funkcje hiperboliczne . . . . .                      | 31        |
| 4.2.2    | Położenie jako funkcja anomalii mimośrodowej . . . . .          | 32        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.2.3    | Anomalia prawdziwa w ruchu hiperbolicznym . . . . .                            | 34        |
| 4.2.4    | Równanie Keplera . . . . .   | 35        |
| 4.2.5    | Prędkość i hodograf . . . . .  | 36        |
| 4.2.6    | Zdegenerowane orbity hiperboliczne . . . . .                                   | 37        |
| 4.3      | Orbity paraboliczne . . . . .  | 38        |
| 4.3.1    | Położenie i odległość . . . . .  | 38        |
| 4.3.2    | Równanie Barkera . . . . .   | 38        |
| 4.3.3    | Prędkość w ruchu parabolicznym . . . . .                                       | 40        |
| <b>5</b> | <b>Przestrzenne zagadnienie względne</b>                                       | <b>41</b> |
| 5.1      | Całki ruchu zagadnienia względnego w dowolnym układzie współrzędnych . . . . . | 41        |
| 5.2      | Macierz orientacji w ujęciu wektorowym . . . . .                               | 43        |
| 5.3      | Opis macierzy orientacji przy pomocy kątów Eulera . . . . .                    | 45        |
| 5.3.1    | Obrót aktywny i pasywny . . . . .  | 46        |
| 5.3.2    | Obroty podstawowe . . . . .  | 48        |
| 5.3.3    | Wektory $\mathbf{G}$ i $\mathbf{e}$ a kąty Eulera . . . . .                    | 50        |
| 5.4      | Elementy keplerowskie orbity . . . . .   | 51        |
| <b>6</b> | <b>Barycentryczne zagadnienie dwóch ciał</b>                                   | <b>54</b> |
| 6.1      | Separacja ruchów obu mas . . . . .   | 54        |
| 6.2      | Własności orbit barycentrycznych . . . . .                                     | 56        |
| <b>7</b> | <b>Potencjał grawitacyjny</b>  | <b>58</b> |
| 7.1      | Siły potencjalne . . . . .   | 58        |
| 7.2      | Potencjał zagadnienia dwóch ciał . . . . .                                     | 59        |
| 7.3      | Potencjał kuli – twierdzenie Newtona . . . . .                                 | 60        |
| <b>8</b> | <b>Zaburzony ruch keplerowski</b>  | <b>61</b> |
| 8.1      | Uzmiennianie stałych . . . . .   | 61        |
| 8.1.1    | Całka siły żywej . . . . .   | 61        |
| 8.1.2    | Całka momentu pędu (pól) . . . . .   | 62        |
| 8.1.3    | Całka Laplace’a . . . . .  | 62        |
| 8.1.4    | Elementy oskulacyjne . . . . .   | 62        |
| 8.2      | Równania Gaussa i równania planetarne Lagrange’a . . . . .                     | 63        |
| 8.3      | Rachunek zaburzeń i typy perturbacji . . . . .                                 | 65        |
| <b>A</b> | <b>Efemeryda keplerowska</b>   | <b>69</b> |
| <b>B</b> | <b>Elementy orbity z wektorów położenia i prędkości</b>                        | <b>72</b> |