Dodatek A

Efemeryda keplerowska

Efemerydą nazywamy w astronomii przewidywane teoretycznie wartości położenia lub położenia i prędkości pewnego ciała niebieskiego. Jeśli użyjemy do takiego przewidywania wzorów zagadnienia dwóch ciał, to otrzymujemy **efemerydę keplerowską** tego ciała. Efemerydę keplerowską na dowolny moment czasu t obliczamy na podstawie podanych elementów orbity wraz z ich epoką początkową t_0 lub t_p oraz przyjmując znaną wartość parametru grawitacyjnego $\mu = k^2\,(m_1 + m_2)$.

W przypadku typowym, gdy z elementów wynika, że orbita nie jest zdegenerowana, postępujemy według podanego niżej algorytmu.

1. Określamy typ orbity (elipsa, parabola czy hiperbola) na podstawie podanych wartości mimośrodu e i półosi a lub odległości perycentrum q (albo parametru p).

2. Jeśli orbita jest eliptyczna lub hiperboliczna, a nie znamy półosi a, to wyliczamy ją wzorem
$$a = \frac{p}{|1 - e^2|} = \frac{q}{1 - e}.$$
Dla orbity parabolicznej wyliczamy $p = 2\,q$ lub $q = p/2$, zależnie od tego, który element został podany.

3. Wyznaczamy ruch średni n z odpowiedniej postaci III prawa Keplera:
$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \qquad \text{dla elipsy lub hiperboli,}$$
$$n = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}, \qquad \text{dla paraboli.}$$

4. Obliczamy wartość anomalii średniej M dla epoki t, korzystając z wzoru
$$M = n\,(t - t_\mathrm{p}) = n\,(t - t_0) + M_0.$$
Dla orbity eliptycznej normalizujemy M do zakresu $0 \leqslant M < 2\pi$.

5. Obliczamy wartość anomalii mimośrodowej E lub zmiennej D rozwiązując

   - równanie Keplera dla elipsy $M = E - e \sin E$,
   - równanie Keplera dla hiperboli $M = e \sinh E - E$,
   - lub równanie Barkera dla paraboli $M = \frac{1}{6} D^3 + \frac{1}{2} D$.

   Metoda iteracji prostych dla elipsy:

   $$E_{j+1} = M + e \sin E_j.$$

   Metoda Newtona dla hiperboli:

   $$E_{j+1} = E_j + \frac{M + E_j - e \sinh E_j}{e \cosh E_j - 1}.$$

   Wzór ścisły dla paraboli:

   $$D = \Delta - \frac{1}{\Delta}, \quad \text{gdzie} \;\; \Delta = \left(3M + \sqrt{1 + 9M^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

6. Wyliczamy anomalię prawdziwą $f = 2 \operatorname{arctg} \Phi$, gdzie

   $$\Phi = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, & \text{dla elipsy,} \\ \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh} \frac{E}{2}, & \text{dla hiperboli,} \\ D, & \text{dla paraboli.} \end{cases}$$

7. Wyznaczamy odległość

   $$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

   oraz wartości współrzędnych ξ,η oraz prędkości $\dot{\xi}$,$\dot{\eta}$ w perycentrycznym układzie orbitalnym

   $$\begin{aligned} \xi &= r \cos f, \\ \eta &= r \sin f, \\ \dot{\xi} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin f, \\ \dot{\eta} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\cos f + e\right). \end{aligned}$$

8. Transformujemy wektory położenia $\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = (\xi, \eta, 0)^{\mathrm{T}}$ i prędkości $\mathbf{v}_{\xi\eta\zeta} = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, 0)^{\mathrm{T}}$ do przyjętego układu współrzędnych wykorzystując argument perycentrum ω, nachylenie I oraz długość węzła wstępującego Ω:

   $$\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{N}\, \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta}, \qquad \mathbf{v}_{xyz} = \mathbf{N}\, \mathbf{v}_{\xi\eta\zeta},$$

gdzie

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-I)\mathbf{R}_3(-\omega).$$

W postaci jawnej

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \cos\omega\,\cos\Omega - \cos I\,\sin\omega\,\sin\Omega,\\
N_{12} &= -\sin\omega\,\cos\Omega - \cos I\,\cos\omega\,\sin\Omega,\\
N_{21} &= \cos\omega\,\sin\Omega + \cos I\,\sin\omega\,\cos\Omega,\\
N_{22} &= -\sin\omega\,\sin\Omega + \cos I\,\cos\omega\,\cos\Omega,\\
N_{31} &= \sin I\,\sin\omega,\\
N_{32} &= \sin I\,\cos\omega.
\end{aligned}$$

Trzecia kolumna macierzy $\mathbf{N}$ jest nieistotna.

W ten sposób otrzymujemy $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{v}$ w przyjętym układzie współrzędnych dla dowolnego momentu czasu t.

Dodatek B

Elementy orbity z wektorów położenia i prędkości

Jak z podanego wektora położenia $\boldsymbol{r}$ i wektora prędkości $\boldsymbol{v}$ w danej epoce t wyliczyć elementy keplerowskie orbity ? Zakładamy przy tym, że znane są masy obu ciał, a więc parametr grawitacyjny μ przyjmujemy jako wiadomy. Dla uproszczenia zapisu, wszystkie wektory utożsamiamy z ich współrzędnymi w układzie $Oxyz$, więc $\boldsymbol{r}$ oznacza $\mathbf{r}_{xyz}$ itd.

1. Ze współrzędnych wektorów $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{v}$ wyliczamy odległość r i prędkość całkowitą v

$$r = \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

2. Wyliczamy wartości stałych ruchu h, $\boldsymbol{G}$ i $\boldsymbol{e}$ z definicji całek siły żywej

$$h = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{\mu}{r},$$

pól

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,\dot{z} - z\,\dot{y} \\ z\,\dot{x} - x\,\dot{z} \\ x\,\dot{y} - y\,\dot{x} \end{pmatrix}.$$

i Laplace'a

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{G}}{\mu} - \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \dot{y}\,G_3 - \dot{z}\,G_2 \\ \dot{z}\,G_1 - \dot{x}\,G_3 \\ \dot{x}\,G_2 - \dot{y}\,G_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. Jeśli $h \neq 0$, wyliczmy półoś wielką lub rzeczywistą a

$$a = \frac{\mu}{2\,|h|}.$$

Jeśli zaś $h = 0$, to wyliczamy *semilatus* paraboli

$$p = (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2)/\mu.$$

4. Mimośród orbity znajdujemy jako długość wektora Laplace'a

$$e = \sqrt{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}.$$

5. Jeśli $G \neq 0$, to nachylenie orbity I wyliczamy ze współrzędnych wektora $\boldsymbol{G}$

$$c = \cos I = \frac{G_3}{G}, \qquad s = \sin I = \frac{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}{G},$$

po czym stosujemy funkcję arccos lub arcsin. Można także zastosować wzór dla tangensa połowy kąta i wyliczać

$$I = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}{G + G_3} = 2 \operatorname{arctg} \frac{G - G_3}{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}.$$

Konkretną postać wzoru wybieramy tak, aby uzyskać optymalną dokładność wyniku.

6. Jeśli otrzymaliśmy wartość $I \neq 0$ oraz $I \neq \pi$, to możemy wyznaczyć długość węzła wstępującego. Ponieważ

$$\sin \Omega = \frac{G_1}{G\,s}, \qquad \cos \Omega = -\frac{G_2}{G\,s},$$

z wzoru na tangens połowy kąta możemy otrzymać

$$\Omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{G\,s + G_2}{G_1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{G_1}{G\,s - G_2}.$$

7. Argument perycentrum można wyznaczyć jeżeli $s \neq 0$ i $e \neq 0$. Z definicji $\boldsymbol{e}$ mamy wtedy

$$e_3 = e\,s\,\sin\omega,$$

Cosinus argumentu perycentrum znajdziemy posługując się dodatkowym wektorem $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{e}$. Jego rzut na oś Oz daje

$$G_1\,e_2 - G_2\,e_1 = G\,e\,s\,\cos\omega.$$

A zatem

$$\sin\omega = \frac{e_3}{e\,s}, \qquad \cos\omega = \frac{G_1\,e_2 - G_2\,e_1}{G\,e\,s}.$$

Korzystając z wzoru dla tangensa połowy kąta otrzymujemy (podstawiając za $\sin\omega$ i $\cos\omega$ prawe strony podanych wyżej równań)

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos\omega}{\sin\omega} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin\omega}{1 + \cos\omega}.$$

8. Jeśli $e \neq 0$, możemy przystąpić do poszukiwania anomalii średniej epoki t. W tym celu zaczynamy od znalezienia anomalii prawdziwej

$$\cos f = \frac{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}}{e\, r} \qquad \sin f = \frac{\boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r})}{G\, e\, r},$$

a następnie

$$D = \frac{1 - \cos f}{\sin f} = \frac{\sin f}{1 + \cos f},$$

wybierając wariant o lepszej dokładności numerycznej. Dla orbit hiperbolicznych lub eliptycznych

$$f = 2 \operatorname{arctg} D.$$

9. W zależności od typu orbity wyliczamy anomalię średnią M danej epoki t następująco:

   - **Ruch eliptyczny:** Znajdujemy anomalię mimośrodową

     $$E = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, D \right),$$

     po czym korzystamy z równania Keplera $M = E - e \sin E$.
   - **Ruch hiperboliczny:** Anomalię mimośrodową otrzymujemy z wzoru

     $$E = 2 \operatorname{Ar\,tgh} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\, D \right) = \ln \frac{1 + e + D\sqrt{e^2-1}}{1 + e - D\sqrt{e^2-1}}.$$

     Następnie korzystamy z równania Keplera $M = e \sinh E - E$.
   - **Ruch paraboliczny:** Równanie Barkera dostarcza nam bezpośrednio

     $$M = \left(\frac{D^2}{3} + 1 \right) \frac{D}{2}.$$

10. Jeżeli chcemy znaleźć moment przejścia przez perycentrum tak, aby szóstym elementem była anomalia średnia epoki t_{p} równa 0, to wyliczamy ruch średni $n = \sqrt{\mu / a^3}$ dla elipsy i hiperboli lub $n = \sqrt{\mu / p^3}$ dla paraboli i stosujemy wzór

    $$t_{\mathrm{p}} = t - \frac{M}{n}.$$

    Jeżeli zaś chcemy wyliczyć anomalię średnią M_0 dla epoki $t_0 \neq t$, to

    $$M_0 = M + n\,(t_0 - t).$$

W ten sposób skompletowaliśmy sześć elementów kelperowskich orbity. W przypadkach szczególnych, gdy $e = 0$ lub $s = 0$, algorytm można łatwo zmodyfikować aby posłużył do wyliczenia elementów nieosobliwych.