

WYKŁADY 16-18
Położenie i stabilność punktów Lagrange'a

3.3.4 Położenie punktów libracyjnych Lagrange'a

Punkty Lagrange'a to punkty krytyczne czyli położenia równowagi układu równań ruchu ograniczonego kołowego zagadnienia trzech ciał.

Używając „jednostek bezwymiarowych” możemy funkcję Hamiltona (3.5) wyrazić jako

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) + yX - xY - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (3.17)$$

gdzie $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$ i $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}$.

Kanoniczne równania ruchu typu (1.120) mają postać

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = X + y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} = Y - x, \\ \dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z} = Z, \\ \dot{X} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = Y - \frac{1-\mu}{r_1^3} (x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3} (x-1+\mu), \\ \dot{Y} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -X - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) y, \\ \dot{Z} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) z. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Punkty krytyczne równań ruchu to takie wartości zmiennych, dla których wszystkie prawe strony równań stają się równe zero (czyli punkty, w których zamiera ruch układu). Poszukajmy takich punktów dla układu (3.18).

Warunki A. Trzecie i szóste z równań (3.18) posiadają punkty krytyczne gdy $z = Z = 0$. Oznacza to, że wszystkie punkty Lagrange'a muszą leżeć w płaszczyźnie orbity mas m_1 i m_2 , gdyż taka jest definicja płaszczyzny Oxy .

Warunki B. Pierwsze dwa równania układu (3.18) wymagają przyjęcia

$$X = -y, \quad Y = x,$$

co w tłumaczeniu z języka pędów oznacza warunki zerowych prędkości \dot{x} i \dot{y} w układzie rotujących osi.

Warunki C. Po uwzględnieniu warunków **A** i **B** pozostają nam jeszcze dwa

nierozpatrywane warunki: $\dot{X} = 0$ i $\dot{Y} = 0$ czyli

$$x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-1+\mu) = 0, \quad (3.19)$$

$$y - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) y = 0. \quad (3.20)$$

Warunek (3.20) może być spełniony w dwóch przypadkach. Pierwszy z nich **CK** to $y = 0$ (punkty kolinearne). Prowadzi on do równania

$$x - (1-\mu) \frac{x+\mu}{|x+\mu|^3} - \mu \frac{x-1+\mu}{|x-1+\mu|^3} = 0. \quad (3.22)$$

Aby rozwiązać równanie (3.22), musimy je rozpatrywać w trzech rozłącznych przedziałach:

	przedział I	przedział II	przedział III
$ x+\mu =$	$x+\mu$	$x+\mu$	$-(x+\mu)$
$ x-1+\mu =$	$-(x-1+\mu)$	$x-1+\mu$	$-(x-1+\mu)$

Warunek CK-I. Przedział I oznacza położenie pomiędzy masami m_1 i m_2 . Warunek (3.22) przybiera wtedy postać

$$x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $(x+\mu)^2(x-1+\mu)^2$ dochodzimy do wniosku, że punkt Lagrange'a L_1 znajduje się na osi Ox i ma współrzędną x będącą pierwiastkiem równania

$$x(x+\mu)^2(x-1+\mu)^2 - (1-\mu)(x-1+\mu)^2 + \mu(x+\mu)^2 = 0. \quad (3.23)$$

Dla dostatecznie małych wartości $\mu \ll \frac{1}{2}$, można przedstawić położenie punktu L_1 w postaci szeregu

$$x_{L_1} \simeq 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \dots \quad (3.24)$$

Warunek CK-II. Przedział II to położenie na prawo od masy m_2 . Warunek (3.22) przybiera wtedy postać

$$x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0.$$

Dla dostatecznie małych wartości $\mu \ll \frac{1}{2}$, można przedstawić położenie punktu L_2 w postaci szeregu zbliżonego do (3.24)

$$x_{L_2} \simeq 1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \dots \quad (3.26)$$

Warunek CK-III. Przedział III oznacza położenie na lewo od masy m_1 a zatem będziemy się zajmować punktem L_3 . Warunek (3.22) ma w tym przedziale postać

$$x + \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x - 1 + \mu)^2} = 0.$$

Szereg dla x_{L_3} różni się istotnie od poprzednich (3.24) i (3.26), posiadając o wiele lepszą zbieżność

$$x_{L_3} \simeq -1 - \frac{5}{12} \mu + \frac{1127}{20736} \mu^3 + \dots \quad (3.28)$$

W ten sposób, wychodząc od warunków **CK**, znaleźliśmy trzy kolinearne punkty Lagrange'a jako trzy rozwiązania (3.19) dla $y = 0$. Istnieje jednak i druga możliwość spełnienia (3.20) oprócz $y = 0$:

$$1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0,$$

co jest możliwe dla

$$r_1 = r_2 = 1.$$

W ten sposób otrzymujemy **warunki CT**. Upewnijmy się jednak jeszcze, czy na pewno warunki **CT** spełniające (3.20) czynią zadość również i (3.19). Podstawiając do (3.19) związek $r_1 = r_2 = 1$ dostajemy

$$\begin{aligned} & x - \frac{1 - \mu}{1} (x + \mu) - \frac{\mu}{1} (x - 1 + \mu) = \\ & = x - (x + \mu - x\mu - \mu^2) - (\mu x - \mu + \mu^2) = 0 \end{aligned}$$

Warunek $r_1 = r_2 = 1$ definiuje dwa punkty: jeden może być umieszczony w wierzchołku trójkąta równobocznego $m_1 m_3 m_2$ o współrzędnej $y > 0$ (punkt L_4) a drugi w wierzchołku trójkąta równobocznego $m_1 m_2 m_3$ o współrzędnej $y < 0$ (punkt L_5). Czysto geometryczne rozważania prowadzą nas do wniosku, że

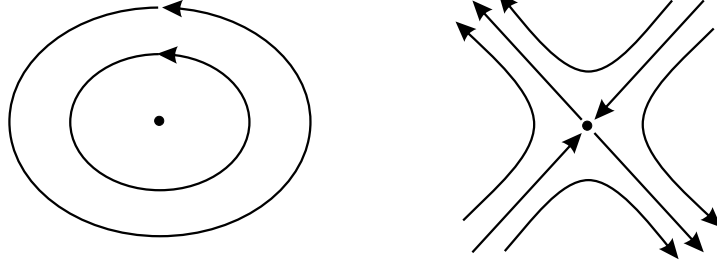
$$\begin{cases} x_{L_4} = \frac{1}{2} - \mu, & y_{L_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x_{L_5} = \frac{1}{2} - \mu, & y_{L_5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \quad (3.29)$$

3.3.5 Stabilność punktów libracyjnych Lagrange'a

Wiadomości ogólne

Wyrażając się w sposób niezbyt ścisły można powiedzieć, że punkt krytyczny układu równań ruchu nazywamy stabilnym, gdy przyjąwszy warunki początkowe nieznacznie odbiegające od tego punktu otrzymamy orbitę, która zawsze pozostawać będzie w jego małym otoczeniu. W układach posiadających funkcję Hamiltona mamy do czynienia z dwiema typowymi sytuacjami, przedstawionymi na rysunku: albo punkt krytyczny jest stabilny typu eliptycznego albo

niestabilny typu hiperbolicznego. Przedstawiony niżej rysunek jest tylko poglądowy, gdyż przedstawia zagadnienie z jednym stopniem swobody (dwuwymiarowa przestrzeń fazowa). Nie uwzględnia on przypadków zdegenerowanych, gdy punktu krytyczne nie są izolowane, lecz zapełniają gęsto pewną krzywą lub powierzchnię.



Rysunek 3.3: Eliptyczny punkt stabilny (z lewej) i hiperboliczny punkt niestabilny (z prawej).

Rozpatrzmy równania układu o K stopniach swobody, opisanego zmiennymi $\zeta = (\mathbf{r}, \mathbf{R})^T$, z funkcją Hamiltona \mathcal{H}

$$\dot{\zeta} = \mathbf{J} \nabla \mathcal{H} \equiv \mathbf{F}(\zeta), \quad (3.30)$$

gdzie \mathbf{J} to standardowa macierz symplektyczna (1.129). Załóżmy, że dla zmiennych $\zeta = \zeta_0$, równania (3.30) posiadają punkt krytyczny $\mathbf{F}(\zeta_0) = \mathbf{0}$. Interesuje nas zachowanie małego przyrostu $\hat{\zeta}$ zdefiniowanego jako odchylenie od punktu krytycznego, a więc $\zeta = \zeta_0 + \hat{\zeta}$. Badanie stabilności liniowej sprowadza się do analizy ruchu w zmiennych $\hat{\zeta}$ opisanej układem równań zlinearyzowanych w otoczeniu ζ_0 . Jeśli więc podstawimy $\zeta_0 + \hat{\zeta}$ w miejsce ζ w równaniach (3.30), to w wyniku linearyzacji otrzymamy

$$\dot{\zeta}_0 + \frac{d\hat{\zeta}}{dt} \approx \mathbf{F}(\zeta_0) + \mathbf{M}(\zeta_0) \hat{\zeta}. \quad (3.31)$$

Macierz \mathbf{M} to macierz $2K \times 2K$ pochodnych cząstkowych (macierz Jacobiego) wektora \mathbf{F} , a zarazem macierz drugich pochodnych hamiltonianu \mathcal{H} , składająca się z trzech niezależnych bloków

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \zeta_{2K}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2K}}{\partial \zeta_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2K}}{\partial \zeta_{2K}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(1)} & \mathbf{M}_{(2)} \\ \mathbf{M}_{(3)} & -\mathbf{M}_{(1)}^T \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

gdzie

$$\mathbf{M}_{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_1 \partial R_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_K \partial R_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_1 \partial R_K} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_K \partial R_K} \end{bmatrix},$$

zaś pozostałe dwa bloki są macierzami symetrycznymi

$$\mathbf{M}_{(2)} = \mathbf{M}_{(2)}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial R_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial R_K \partial R_1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial R_1 \partial R_K} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial R_K^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{(3)} = \mathbf{M}_{(3)}^T = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_1^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_K \partial r_1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_1 \partial r_K} & \cdots & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_K^2} \end{bmatrix}.$$

Macierz o strukturze blokowej typu (3.32) (z symetrycznymi $\mathbf{M}_{(2)}$ i $\mathbf{M}_{(3)}$) nazywamy **macierzą hamiltonowską**.

W równaniu (3.31) pochodna $\dot{\zeta}_0 = \mathbf{0}$, gdyż są to wartości stałe, natomiast $\mathbf{F}(\zeta_0) = \mathbf{0}$ z definicji punktu krytycznego. Pozostaje więc nam tak zwany **układ równań wariacyjnych**

$$\frac{d\hat{\zeta}}{dt} = \mathbf{M}(\zeta_0) \hat{\zeta}, \quad (3.33)$$

będący układem równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach (pochodne składające się na macierz \mathbf{M} obliczmy w punkcie krytycznym ζ_0 więc są stałe). Warto zauważyć, że jest to układ równań kanonicznych i posiada on hamiltonian w postaci formy kwadratowej

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{J} \mathbf{M}(\zeta_0) \zeta. \quad (3.34)$$

Istotnie,

$$\frac{d\hat{\zeta}}{dt} = \mathbf{J} \nabla \mathcal{K} = \mathbf{J} \nabla \left(-\frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{J} \mathbf{M}(\zeta_0) \zeta \right) = -\mathbf{J}^2 \mathbf{M}(\zeta_0) \zeta = \mathbf{M}(\zeta_0) \zeta.$$

Z teorii równań różniczkowych liniowych wiemy, że równania typu (3.33) posiadają rozwiązanie w postaci superpozycji wyrazów typu

$$\hat{\zeta}_k = \alpha_k \exp \lambda_k t, \quad (3.35)$$

gdzie α_k oznacza jest jedną ze stałych dowolnych, natomiast λ_k jest jedną z **wartości własnych** macierzy $\mathbf{M}(\zeta_0)$, to znaczy rozwiązaniem **równania charakterystycznego**

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}_{2K}) = 0, \quad (3.36)$$

czyli

$$\det \begin{bmatrix} M_{1,1} - \lambda & M_{1,2} & \cdots & M_{1,2K} \\ M_{2,1} & M_{2,2} - \lambda & \cdots & M_{2,2K} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ M_{2K,1} & M_{2K,2} & \cdots & M_{2K,2K} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Jest to równanie stopnia $2K$ i tyle też pierwiastków zespolonych

$$\lambda_k = a_k + i b_k$$

powinno ono posiadać (uwzględniając krotność pierwiastków). Wartości własne λ_k przesądzają o stabilności linowej gdyż rozwiązanie (3.35) układu zlinearyzowanego (3.33) przybiera wtedy postać superpozycji wyrazów typu

$$\hat{\zeta}_k = \alpha_k \exp(a_k t) [\cos b_k t + i \sin b_k t]. \quad (3.37)$$

Jeśli dla którejkolwiek z wartości własnych część rzeczywista a_k jest dodatnia, to $\hat{\zeta}_k$ może rosnać nieograniczenie i punkt krytyczny uznajemy za niestabilny. W przeciwnym przypadku mamy punkt liniowo stabilny.

Macierze hamiltonowskie mają ważną właściwość: jeśli λ_k jest zespoloną wartością własną takiej macierzy, to są nimi również

$$-\lambda = -a_k - i b_k, \quad \bar{\lambda} = a_k - i b_k, \text{ oraz } -\bar{\lambda} = -a_k + i b_k.$$

Wystarczy więc stwierdzić, że któraś wartość własna układu z macierzą hamiltonowska ma niezerową część rzeczywistą a już możemy być pewni niestabilności punktu krytycznego.

Wyniki badania stabilności

Analiza stabilności liniowej punktów Lagrange'a prowadzi do następujących wyników:

- Trzy punkty kolinearne Lagrange'a L_1 , L_2 i L_3 są punktami niestabilnymi.
- Trójkątne punkty libracyjne L_4 i L_5 są liniowo stabilne dla

$$\mu < \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) \approx 0.03852 \dots \quad (3.53)$$

Stabilność liniowa nie zawsze jest dostatecznym kryterium. Uwzględniając wyrazy wyższego rzędu w równaniach wariacyjnych znajdujemy dwa wyjątki od stabilności linowej w ograniczonym, kołowym zagadnieniu trzech ciał. Mają one miejsce dla

$$\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{45} \sqrt{1833} \right) \approx 0.0243 \dots$$

oraz dla

$$\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{45} \sqrt{117} \right) \approx 0.0135 \dots$$

Punktu trójkątne są wtedy niestabilne mimo, iż spełniony jest liniowy warunek (3.53).

ĆWICZENIA

Zadanie 16.1 Wykreśl krzywe stałej energii wahadła matematycznego

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} X^2 - \cos x. \quad (23)$$

Na podstawie wykresu zlokalizuj położenia równowagi i oceń ich stabilność. Następnie wykreśl powierzchnię $\mathcal{H}(x, X)$: jaki związek zachodzi między kształtem tej powierzchni a stabilnością położenia równowagi ?

Zadanie 16.2 Znajdź położenia równowagi wahadła (23) jako punkty krytyczne równań ruchu i zbadaj ich stabilność liniową poprzez analizę równań wariacyjnych. Sprawdź, czy macierz równań wariacyjnych jest macierzą hamiltonowską.

Zadanie 16.3 Dla obu położenia równowagi wahadła podaj funkcję Hamiltona typu (3.34). Sprawdź, czy prowadzi ona do prawidłowych równań wariacyjnych. Sporządź wykresy krzywych stałej energii w obu przypadkach i porównaj je z wynikami Zadania 16.1.

Zadanie 16.4 Znajdź numeryczne wartości położenia wszystkich punktów Lagrange'a dla $\mu = 0.5$, $\mu = 0.1$ i $\mu = 0.001$ (funkcja `numeric::fsolve`). Porównaj wyniki dla punktów kolinearnych z wzorami przybliżonymi (3.24), (3.26) i (3.28).

Zadanie 16.5 Korzystając z wyników Zadania 16.4, zbadaj stabilność liniową punktów Lagrange'a dla $\mu = 0.5$, $\mu = 0.1$ i $\mu = 0.001$.

Zadanie 16.6 Zbadaj stabilność liniową orbit kołowych względnego zagadnienia dwóch ciał z parametrem grawitacyjnym $\mu = 1$ wyrażonego w zmiennych Hilla-Whittakera i traktowanego jako układ z jednym stopniem swobody (r, R) .

Zadanie 16.7 Podaj położenia i pędy dla ciał w punktach Lagrange'a układu Słońce-Jowisz (zaniedbaj mimośród orbity Jowisza). Wyniki powinny zostać wyrażone w jednostkach astronomicznych i dobach. Co wiemy o stabilności tych punktów ?