

Matematyczne podstawy mechaniki nieba 2012/13.
Zagadnienia egzaminacyjne.

1. Na czym polega formalizm newtonowski, jakie są jego zalety i wady ?
2. Jak usuwamy jawną zależność od czasu w równaniach ruchu formalizmu newtonowskiego ?
3. Na czym polega metoda uzmienniania stałych dla zaburzonego układu ze znanymi całkami ruchu ?
4. Co to są elementy oskulacyjne orbity ?
5. Wyprowadzić równania dla uzmiennionych stałych h , $\vec{G}$, $\vec{e}$ przy dowolnej sile zaburzającej $\vec{P}$.
6. Wyprowadzić równanie Gaussa dla zmian pól wielkiej orbity eliptycznej przy ogólnej postaci zaburzenia $\vec{P}$.
7. Przedstawić twierdzenie o prędkości kątowej wywołanej zmianami kątów Eulera i zastosować je do wyprowadzenia równania Gaussa dla $\dot{\Omega}$.
8. Omówić trzy podstawowe bazy stosowane do rozkładu siły zaburzającej $\vec{P}$.
9. Wymienić ograniczenia w stosowaniu równań Gaussa, wyjaśnić pochodzenie „osobliwości” i sposób ich usuwania.
10. Wypisać równania Gaussa (1–5) gdy $\mathbf{P}$ jest siłą tarcia styczną do orbity i $\mathbf{P} = -\gamma^2 \mathbf{v}$. Jakie wnioski na temat ruchu w tym zagadnieniu można wysnuć bez rozwiązywania równań ?
11. Manewr zmiany nachylenia w świetle równań Gaussa.
12. Zdefiniować dwuliniową formę symplektyczną i macierze symplektyczne.
13. Udowodnić, że macierze symplektyczne tworzą grupę.
14. Udowodnić, że jednoformy Φ i $\Phi' = c(\Phi + dS)$ generują te same równania Pfaffa.
15. Przedstawić trzy rodzaje formy Pfaffa, które generują równania kanoniczne Hamiltona. Wyprowadzić te równania z jednej z podanych jednoform.

16. Kiedy jedna ze zmiennych kanonicznych jest całką ruchu i kiedy hamiltonian jest całką ruchu ?
17. Zdefiniować kanoniczne nawiasy Poissona i wyprowadzić wzór

$$\dot{f} = \{f, \mathcal{H}\} + D_t f.$$

18. Podać funkcję Hamiltona i równania ruchu układu N ciał z potencjałem V w zmiennych kartezjańskich i układzie inercyjnym. Wykazać ich zgodność z II zasadą dynamiki Newtona.
19. Na jakiej podstawie można ruch jednego ciała opisać równaniami kanonicznymi używając pędu i energii na jednostkę masy ?
20. Co to jest transformacja kanoniczna ? Podać jej warunek dostateczny.
21. Wykazać niezmienniczość nawiasów Poissona względem transformacji kanonicznej.
22. Zdefiniować transformacje Mathieu i zilustrować definicję dowolnie wybranym przykładem.
23. Przeprowadzić kanoniczne rozszerzenie transformacji punktowej $\vec{p} = \mathbf{A}(t)\vec{q}$. (Tw. 5)
24. Transformacja do układu jednostajnie obracającego się jako transformacja Mathieu. Jak interpretujemy pędy w układzie obracającym się ?
25. Podać funkcję Hamiltona pełnego zagadnienia dwóch ciał w układzie barycentrycznym i przeprowadzić redukcję do zagadnienia względnego.
26. Przedstawić zmienne Hilla-Whittakera i podać funkcję Hamiltona oraz równania ruchu zaburzonego zagadnienia względnego dwóch ciał w tych zmiennych.
27. Udowodnić, że jeśli

$$\vec{Q} = \nabla_{\vec{q}} F_2, \quad \vec{p} = \nabla_{\vec{P}} F_2,$$

to funkcja tworząca $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ generuje transformację kanoniczną z resztą $\mathcal{R} = D_t F_2$.

28. Zdefiniować zmienne kąt-działanie i uzasadnić, że zmienne Poincarégo (l, L) , dla których

$$x = \sqrt{2L\omega^{-1}} \sin l, \quad X = \sqrt{2L\omega} \cos l,$$

są zmiennymi kąt-działanie oscylatora harmonicznego. (Uwaga: nie zapominamy o sprawdzeniu kanoniczności !)

29. Zmienne Delaunaya: definicja przy pomocy elementów keplerowskich i własności.
30. Wyprowadzić dwa dowolnie wybrane równania planetarne Lagrange'a: jedno z trójki $(\dot{a}, \dot{e}, \dot{I})$ i jedno z $(\dot{M}, \dot{\omega}, \dot{\Omega})$.

Dodatek: Równania Gaussa

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[R e \sin f + T \frac{p}{r} \right] = \frac{2v}{n^2 a} S, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{1}{\mu a e} \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r} + (a p - r^2) \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{P} \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a} [R \sin f + T (\cos f + \cos E)] \\ &= \frac{1}{v} \left[S \frac{2p}{r} \cos E + N \sqrt{1-e^2} \sin E \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{I} = \frac{r \cos(f+\omega)}{\mu p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P} = \frac{r \cos(f+\omega)}{\sqrt{\mu p}} B, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{r}{\mu p e} \left[\frac{\sqrt{\mu p}}{r} (\cos E + e) \mathbf{r} - (p+r) \sin f \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{P} - c\dot{\Omega} \\ &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-R \cos f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] - c\dot{\Omega} \\ &= \frac{1}{e v} [2 S \sin f - N (e + \cos E)] - c\dot{\Omega}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(f+\omega)}{s \mu p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P} = \frac{r \sin(f+\omega)}{s \sqrt{\mu p}} B, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{M} &= n - \frac{1}{n a^2} \left[2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} + \sqrt{\mu p} (\dot{\omega} + c\dot{\Omega}) \right] \\ &= n - \frac{1}{n a^2 e} [R (2 r e - p \cos f) + T (r + p) \sin f] \\ &= n - \frac{\sqrt{1-e^2}}{v e} \left[N (\cos f - e) - S \left(1 + \frac{2 r e^2}{p} \right) \sin f \right]. \end{aligned} \quad (6)$$