WYKŁAD 24
Metody analityczne: rachunek zaburzeń dla równań algebraicznych i przestępnych.

Poszukiwać będziemy pierwiastka y równania

$$f(y;\,\varepsilon) = 0. \tag{5.24}$$

Bez utraty ogólności można przyjąć, że równanie ma postać

$$f(y;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(y) = 0. \tag{5.25}$$

Aby można było zastosować rachunek zaburzeń, podstawienie $\varepsilon = 0$ do (5.24) powinno prowadzić do rozwiązywalnego **równania niezaburzonego**

$$f_0(y) \equiv f(y;\,0) = 0. \tag{5.26}$$

Rozwiązanie (5.26) oznaczamy przez x.

Kolejne kroki rachunku zaburzeń:

Niech „stara" zmienna y będzie funkcją x i małego parametru ε.

1. Zakładamy dla transformacji $y(x;\varepsilon) \to x$ postać obciętego szeregu

   $$y(x;\varepsilon) = x + \varepsilon\,\Phi_1(x) + \varepsilon^2\,\Phi_2(x) + \ldots + \varepsilon^N\,\Phi_N(x), \tag{5.27}$$

   co oznacza, że prowadzimy *rachunek zaburzeń N-tego rzędu*, czyli poszukujemy rozwiązania (5.24) z błędem $O(\varepsilon^{N+1})$.

2. Wykonujemy „złożenie skośne", czyli podstawiamy założoną postać transformacji (5.27) do równania (5.25)

   $$f(x + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \Phi_k(x);\,\varepsilon) = 0$$

   i rozwijamy lewą stronę do postaci szeregu potęgowego

   $$g_0 + \varepsilon\,g_1 + \varepsilon^2\,g_2 + \ldots + \varepsilon^N\,g_N = 0 \tag{5.28}$$

   z dokładnością taką jak (5.27) a więc aż do $O(\varepsilon^N)$ włącznie.

3. Celem rachunku zaburzeń jest znalezienie takiej transformacji $y \to x$, aby w wyniku złożenia skośnego otrzymać wszystkie funkcje $g_k = 0$, gdyż wtedy równanie (5.28) zostanie sprowadzone do rowiązywalnej postaci $g_0(x) = 0$. W tym celu musimy rozwiązać układ równań

   $$g_k(x, \Phi_1, \ldots, \Phi_k) = 0, \tag{5.30}$$

wyznaczając funkcje $\Phi_k(x)$. Dzięki specyfice układu (5.30) zadanie jest proste, gdyż jeśli zaczniemy od $k = 1$ i wyznaczymy $\Phi_1(x)$ a następnie przejdziemy do $k = 2$ by wyznaczyć $\Phi_2(x)$ i tak dalej, to każde następne równanie $g_k = 0$ będzie zawierało jedną tylko funkcję niewiadomą Φ_k i $k - 1$ funkcji znanych z poprzednich kroków.

4. Gdy już dojdziemy do $\Phi_N(x)$, wstawiamy wszystkie funkcje do wzoru (5.27) który staje się rozwiązaniem zaburzonym naszego problemu z błędem $O(\varepsilon^{N+1})$.

Rachunek zaburzeń dla równań algebraicznych wymaga drobnej modyfikacji jeżeli x jest pierwiastkiem wielokrotnym równania $f_0(x) = 0$. Przypomnijmy, że x nazywamy pierwiastkiem n-krotnym jeśli

$$f_0(x) = f_0'(x) = \ldots = f_0^{(n-1)}(x) = 0.$$

W takim przypadku należy zamiast (5.27) posłużyć się transformacją

$$y(x;\varepsilon) = x + \varepsilon^{1/n}\,\Phi_1(x) + \varepsilon^{2/n}\,\Phi_2(x) + \ldots \tag{5.31}$$

ĆWICZENIA

Zadanie 23.1 Zaprogramuj w pakiecie MuPad rozwiązywanie równania Keplera metodą rachunku zaburzeń dowolnie ustalonego rzędu. Sprowadź wynik do postaci wielomianu trygonometrycznego.

Zadanie 23.2 Korzystając z pakietu MuPad, wyprowadź podane na wykładzie szeregi dla położenia punktów Lagrange'a L_1 (3.24), L_2 (3.26) i L_3 (3.28). W tym celu rozwiąż metodą rachunku zaburzeń równania

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_1: &\quad x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} &=& \quad 0,\\ \mathrm{L}_2: &\quad x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} &=& \quad 0,\\ \mathrm{L}_3: &\quad x + \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} &=& \quad 0. \end{aligned}$$

W obydwu zadaniach warto wykorzystać pętlę `for` *oraz funkcję* `assign`.