WYKŁAD 12
Kanoniczne równania ruchu względnego

2.4.3 Kanoniczne równania ruchu względnego

Wprowadźmy kanoniczne „zmienne heliocentryczne” Poincarego. Położenia względne odniesione są do masy m_0 z tym, że wektor $\boldsymbol{u}_0$ nie będzie równy $\mathbf{0}$, lecz będzie oznaczał położenie masy centralnej względem barycentrum. Jeśli więc $\boldsymbol{r}_i$ oznacza barycentryczne wektory położenia, to

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{r}_0, \qquad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{2.18}$$

Nowe położenia

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{col}(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}),$$

można powiązać ze starymi

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N-1}),$$

wzorem macierzowym

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{A}\, \boldsymbol{r}, \tag{2.19}$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą blokową $3N \times 3N$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ -\mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ -\mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}^{-1}\, \boldsymbol{u},$$

gdzie

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Nowe pędy

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{col}(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1, \ldots, \boldsymbol{U}_{N-1}),$$

są liniowymi funkcjami barycentrycznych pędów

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{col}(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_{N-1}).$$

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{B}\, \boldsymbol{R}, \tag{2.22}$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.23}$$

czyli

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_3 & \cdots & \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{E}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

A zatem, dla wszystkich ciał oprócz zerowego

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{R}_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \tag{2.25}$$

natomiast dla $\boldsymbol{U}_0$ mamy, zgodnie z (2.13),

$$\boldsymbol{U}_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_i = \mathbf{0}. \tag{2.26}$$

Jak widać, interpretacja zmiennych względnych (heliocentrycznych) Poincarégo jest bardzo prosta: położenia planet odniesione są do masy głównej (Słońca) a pędy do barycentrum.

Funkcja Hamiltona

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \;&=\; \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i} \boldsymbol{U}_i^2 + \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} \boldsymbol{U}_i \cdot \boldsymbol{U}_j - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{k^2 m_0 m_i}{u_i} - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{i,j}}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Jest to funkcja Hamiltona układu zredukowanego, gdyż wyeliminowaliśmy z niej pęd $\boldsymbol{U}_0$ przy pomocy całki barycentrum. A zatem nie można użyć $\mathcal{K}$ do badania ruchu zmiennych $\boldsymbol{u}_0$ i $\boldsymbol{U}_0$, ale znając wszystkie pozostałe zmienne łatwo możemy wyliczyć ich wartości.

Równania ruchu

Dla $1 \leq i \leq N-1$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_i = \{\boldsymbol{u}_i, \mathcal{K}\} = \frac{\boldsymbol{U}_i}{m_i} + \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{N-1} \boldsymbol{U}_j, \tag{2.30}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_i = \{\boldsymbol{U}_i, \mathcal{K}\} = -\frac{k^2 m_0 m_i}{u_i^3} \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} \frac{k^2 m_i m_j}{\Delta_{i,j}^3} \left(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j\right). \tag{2.31}$$

Zmienne względne Poincarego nie naruszają definicji ani wartości momentu pędu układu, to

$$\boldsymbol{G} = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i = \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{U}_i. \tag{2.34}$$

W ostatnim wyrażeniu opuściliśmy $\boldsymbol{u}_0 \times \boldsymbol{U}_0$, gdyż $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{0}$.

ĆWICZENIA

Zadanie 12.1 Sprawdź, czy równania kanoniczne (2.30) i (2.31) są zgodne z równaniami klasycznymi (2.16) z Wykładu 11.

Zadanie 12.2 Niech $N = 2$. Podaj funkcję Hamiltona i kanoniczne równania ruchu dwóch ciał w zmiennych względnych Poincarégo. Wyliczając drugie pochodne $\ddot{\boldsymbol{u}}_1$ sprawdź, czy otrzymujemy klasyczne równania ruchu względnego zagadnienia dwóch ciał.

Zadanie 12.3 Użyj danych z plików `helioc1.txt` i `masy.txt` do sprawdzenia, czy funkcje Hamiltona (2.5) z Wykładu 11 i (2.29) są równe co do wartości.

Zadanie 12.4 Użyj danych z plików `helioc1.txt` i `masy.txt` do numerycznego sprawdzenia wzoru (2.34).