WYKŁAD 11
Zagadnienie N ciał

2.1 Sformułowanie zagadnienia w dowolnym układzie inercjalnym

Określić ruch układu N punktów materialnych pod wpływem ich wzajemnego przyciągania.

Potencjał układu N punktów materialnych

$$V_N = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{k^2 \, m_i \, m_j}{\Delta_{i,j}}, \tag{2.1}$$

gdzie

$$\Delta_{i,j} = ||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \tag{2.2}$$

Wprowadzając kartezjańskie wektory położenia i-tego ciała $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$ oraz jego pędu $\boldsymbol{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^{\mathrm{T}}$, możemy opisać ruch układu N ciał w $6N$-wymiarowej przestrzeni fazowej posługując się wektorem stanu

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{R}),$$

gdzie

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{col}\,(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2,\, \ldots\, , \boldsymbol{r}_N)\,, \qquad \boldsymbol{R} = \mathrm{col}\,(\boldsymbol{R}_1,\, \boldsymbol{R}_2,\, \ldots\, , \boldsymbol{R}_N)\,.$$

A zatem, w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia możemy podać dla zagadnienia N ciał funkcję Hamiltona $\mathcal{H}$, która nie zależy jawnie od czasu i ma postać

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{R}_i^2}{2\, m_i} + V_N(\boldsymbol{r}). \tag{2.3}$$

Kanoniczne równania ruchu otrzymywane z (2.3) mają postać

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_1 \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{r}}_N \\ \dot{\boldsymbol{R}}_1 \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{R}}_i \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{R}}_N \end{pmatrix} = \mathbf{J}\, \nabla \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{R}_1}{m_1} \\ \cdots \\ \frac{\boldsymbol{R}_i}{m_i} \\ \cdots \\ \frac{\boldsymbol{R}_N}{m_N} \\ \sum_{j=2}^{N} \frac{k^2\, m_1\, m_j}{\Delta_{1,j}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_1) \\ \cdots \\ \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{\Delta_{i,j}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{k^2\, m_N\, m_j}{\Delta_{N,j}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_N) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

2.2 Całki ruchu zagadnienia N ciał

2.2.1 Całka sił żywych (energii)

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{R}_i^2}{2\, m_i} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{k^2\, m_i\, m_j}{||\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i||} = \text{const.} \tag{2.5}$$

2.2.2 Całki barycentrum

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \quad = \quad \boldsymbol{a} \;=\; \mathbf{const}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{r}_i \quad = \quad \boldsymbol{a}\, t + \boldsymbol{b}, \tag{2.8}$$

Sześć całek ruchu (2.7) i (2.8) nazywamy całkami barycentrum (środka masy). Nazwa jest o tyle uzasadniona, że położenie środka masy dane jest wektorem

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{2.9}$$

a w takim razie mamy

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = \frac{\boldsymbol{a}\, t + \boldsymbol{b}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \tag{2.10}$$

Innymi słowy, układ odniesienia związany z barycentrum układu N ciał jest układem inercjalnym.

2.2.3 Całki momentu pędu (pól)

$$\boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i = \mathbf{const}, \tag{2.12}$$

2.3 Niecałkowalność zagadnienia N ciał

Jeśli policzyć całki znalezione w poprzednim rozdziale, to bez względu na liczbę ciał N otrzymaliśmy 10 niezależnych całek ruchu (1 energii + 6 barycentrum + 3 pól). Więcej całek ruchu dla dowolnego N nie da się znaleźć, co pod koniec XIX wieku udowodnili najpierw Bruns i Poincaré dla $N = 3$ a następnie Painlevé dla dowolnego N. (Twierdzenie Brunsa-Poincarégo przedstawione jest w *Dynamice analitycznej* Whittakera). Jeśli nie można znaleźć innych całek niż wyżej wymieniona dziesiątka, to brakuje nam $6N - 11$ całek i musimy uznać, że dla $N > 2$ zagadnienie jest niecałkowalne. Innymi słowy, nie potrafimy rozwiązać zagadnienia N ciał dla $N > 2$.

2.4 Ważniejsze typy równań ruchu stosowane w zagadnieniu N ciał

2.4.1 Płaszczyzna Laplace'a i zmienne barycentryczne

> Płaszczyzna niezmiennicza Laplace'a dla układu N ciał przechodzi przez jego barycentrum i jest zorientowana tak, aby wektor $\boldsymbol{G}$ był do niej normalny.

W układzie barycentrycznym obowiązuje funkcja Hamiltona (2.3) i równania ruchu (2.4), z dodatkowymi warunkami

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{0}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{0}. \tag{2.13}$$

2.4.2 Klasyczne równania ruchu względnego

W klasycznym ujęciu operujemy względnymi wektorami położenia, prędkości i przyspieszenia

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{u}}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{r}}_0, \qquad \ddot{\boldsymbol{u}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \ddot{\boldsymbol{r}}_0, \tag{2.14}$$

dla $i = 1, \ldots, N-1$. Oczywiście, $\boldsymbol{u}_0 = 0$, zaś

$$\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i. \tag{2.15}$$

Równania ruchu:

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_i \;=\; -\frac{k^2\,(m_0 + m_i)}{u_i^3}\,\boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} k^2\, m_j \left[\frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{\Delta_{i,j}^3} + \frac{\boldsymbol{u}_j}{u_j^3}\right], \tag{2.16}$$

gdzie

$$\Delta_{i,j} = ||\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i||.$$

ĆWICZENIA

We wszystkich zadaniach korzystać będziemy z plików `helioc1.txt`, `helioc2.txt` i `masy.txt`. Pliki `helioc1.txt` i `helioc2.txt` zawierają heliocentryczne położenia i prędkości planet w układzie równikowym równonocnym epoki J2000.0 dla dwóch różnych dat t_1 i t_2 odległych o 2000 dni. Pierwszy wiersz to x, y, z Merkurego, drugi wiersz to $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Merkurego itd. aż do Plutona. Jednostki to AU i d. Plik `masy.txt` zawiera stosunki $M_\odot/M_\mathrm{p}$, gdzie M_p to masy kolejnych planet od Merkurego do Plutona. We wszystkich plikach Ziemia i Księżyc traktowane są łącznie jako jedna „planeta podwójna”.

Zadanie 11.1 Wylicz położenie i prędkość środka masy Układu Słonecznego względem Słońca dla dwóch dat t_1 i t_2.

Zadanie 11.2 Wyznacz barycentryczne położenia i prędkości planet i Słońca.

Zadanie 11.3 Wylicz barycentryczne momenty pędu planet i Słońca dla epok t_1 i t_2. Które z ciał ma największy moment pędu ?

Zadanie 11.4 Sprawdź całki momentu pędu i energii dla dat t_1 i t_2. Podaj nachylenie płaszczyzny Laplace'a do równika epoki J2000.0 w momentach t_1 i t_2.