WYKŁAD 10
Równania planetarne Lagrange'a

1.7 Równania planetarne Lagrange'a

Przez równania planetarne Lagrange'a rozumiemy wariant równań Gaussa dla uzmiennionych elementów keplerowskich, który można stosować dla sił zaburzających posiadających potencjał.

Aby znaleźć równania ruchu dla uzmiennionych elementów keplerowskich, dalej zwanych zmiennymi keplerowskimi, przyjmiemy funkcję Hamiltona (1.196) z dodatkowym potencjałem zaburzającym $V(\boldsymbol{r}, t)$. Ponieważ położenie $\boldsymbol{r}$ jest funkcją wszystkich sześciu zmiennych keplerowskich, mamy

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2\,a} + V(a, e, I, M, \omega, \Omega, t). \tag{1.200}$$

Dla każdej ze zmiennych keplerowskich $\alpha \in \{a, e, I, M, \omega, \Omega\}$, możemy posłużyć się wzorem (1.136)

$$\dot{\alpha} = \{\, \alpha \,,\, \mathcal{H} \,\}, \tag{1.201}$$

gdzie nawias Poissona (1.133) będziemy liczyć względem najbardziej wygodnego w tym kontekście zestawu zmiennych kanonicznych – zmiennych Delaunaya (1.195), to znaczy

$$\{\, \alpha \,,\, \mathcal{H} \,\} = \frac{\partial \alpha}{\partial \ell}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} - \frac{\partial \alpha}{\partial L}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \ell} + \frac{\partial \alpha}{\partial g}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} - \frac{\partial \alpha}{\partial G}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g} + \frac{\partial \alpha}{\partial h}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} - \frac{\partial \alpha}{\partial H}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}. \tag{1.202}$$

1.7.1 Pochodne cząstkowe zmiennych keplerowskich względem zmiennych Delaunaya

Kąty M, ω i Ω

$$\frac{\partial \phi}{\partial \ell} = \frac{\partial \phi}{\partial M}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial g} = \frac{\partial \phi}{\partial \omega}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial h} = \frac{\partial \phi}{\partial \Omega}, \tag{1.203}$$

Półoś wielka, mimośród, nachylenie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(a,e,I)}{\partial L} &= 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{\partial \phi}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu\,a}}\,\frac{\partial \phi}{\partial e}, \\
\frac{\partial \phi(a,e,I)}{\partial G} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu\,a}}\,\frac{\partial \phi}{\partial e} + \frac{c}{s\sqrt{\mu\,p}}\,\frac{\partial \phi}{\partial I}, \\
\frac{\partial \phi(a,e,I)}{\partial H} &= -\frac{1}{s\sqrt{\mu\,p}}\,\frac{\partial \phi}{\partial I}.
\end{aligned} \tag{1.205}$$

1.7.2 Równania dla zmiennych keplerowskich

Oznaczmy $c = \cos I$, $s = \sin I$, $n = \sqrt{\mu/a^3}$ i $\eta = \sqrt{1-e^2}$. Równania Lagrange'a mają postać

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= -\frac{2}{n\,a}\,\frac{\partial V}{\partial M}, \\
\dot{e} &= -\frac{\eta}{n\,a^2\,e}\left(\eta\,\frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\partial V}{\partial \omega}\right), \\
\frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{n\,a^2\,s\,\eta}\left(c\,\frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial V}{\partial \Omega}\right), \\
\dot{M} &= n + \frac{2}{n\,a}\,\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\eta^2}{n\,a^2\,e}\,\frac{\partial V}{\partial e}, \\
\dot{\omega} &= -\frac{1}{n\,a^2}\left(\frac{\eta}{e}\,\frac{\partial V}{\partial e} - \frac{c}{s\,\eta}\,\frac{\partial V}{\partial I}\right), \\
\dot{\Omega} &= -\frac{1}{n\,a^2\,\eta\,s}\,\frac{\partial V}{\partial I}.
\end{aligned}
\tag{1.206}
$$

Warto pamiętać, że w niektórych źródłach rówania (1.206) występują z funkcją sił $U = -V$ zamiast potencjału i wtedy różnią się znakami od podanych tutaj.

ĆWICZENIA

Zadanie 10.1 Wyprowadź równania planetarne Lagrange'a dla zmiennych a, e, I, E, ω, Ω w sytuacji, gdy potencjał zaburzający V jest funkcją pięciu elementów keplerowskich i anomalii mimośrodowej E.

Zadanie 10.2 Podaj równania planetarne Lagrange'a dla zmiennych nieosobliwych

$$
\begin{aligned}
q &= \sin\tfrac{I}{2}\,\cos\Omega, \\
p &= \sin\tfrac{I}{2}\,\sin\Omega, \\
k &= e\,\cos(\omega+\Omega), \\
h &= e\,\sin(\omega+\Omega), \\
\lambda &= M + \omega + \Omega,
\end{aligned}
$$

w sytuacji, gdy potencjał zaburzający V jest funkcją zmiennych keplerowskich. Przekształć wszystkie wyrażenia tak, aby ich nieosobliwość dla $e = 0$ oraz $I = 0$ była bezpośrednio widoczna.

Zadanie 10.3 Znajdź błąd w rozumowaniu:

> Dla argumentu szerokości w zmiennych Hilla-Whittakera $\dot{\vartheta} = \{\vartheta, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Theta}$. Ponieważ w zagadnieniu dwóch ciał $\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2}$ a $\Theta = G$, to $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} = 0$. A zatem $\dot{\vartheta} = 0$ i ciało nie porusza się.