WYKŁAD 9
Zmienne Delaunaya. Transformacje kanoniczne typu Liego.

Przykład 1.12 – Zmienne Delaunaya

Zmienne Delaunaya są blisko spokrewnione ze zmiennymi keplerowskimi:

$$\begin{array}{lllllll} \ell & = & M, & L & = & \sqrt{\mu\, a}, & \\ g & = & \omega, & G & = & \sqrt{\mu\, p} \;=\; L\sqrt{1-e^2}, & \\ h & = & \Omega, & H & = & G_z \;=\; G\,\cos I. & \end{array} \tag{1.195}$$

Jeśli zaś chodzi o funkcję Hamiltona, to w świetle całki energii $\mathcal{K} = -\mu/(2\,a)$ a zatem

$$\mathcal{K} = -\frac{\mu^2}{2\,L^2}. \tag{1.196}$$

Jest to najprostsza i ostateczna postać funkcji Hamiltona dla względnego zagadnienia dwóch ciał. Zmienne Delaunaya są zmiennymi kąt-działanie dla tego zagadnienia, a zatem ich znalezienie jest równoznaczne z rozwiązaniem problemu ruchu dwóch ciał. Wypisując równania kanoniczne

$$\begin{array}{ll} \dot{\ell} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} = n, & \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \ell} = 0, \\ \dot{g} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial G} = 0, & \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial g} = 0, \\ \dot{h} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial H} = 0, & \dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial h} = 0, \end{array} \tag{1.197}$$

stwierdzamy, że istotnie wszystkie zmienne typu „działanie” (L, G, H) są stałe, zaś kąt ℓ jest liniową funkcją czasu. Fakt, iż dodatkowo $\dot{g} = \dot{h} = 0$ dla wszelkich wartości pędów, oznacza, że w zagadnieniu dwóch ciał występuje tzw. degeneracja właściwa (inaczej: degeneracja istotna).

1.6.3 Transformacje typu Liego

Niech $\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q})$ oznacza zmienne kanoniczne układu z funkcją Hamiltona $\mathcal{H}$. Niech τ oznacza parametr rzeczywisty. Zmienne $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P})$ będą powiązane z $\boldsymbol{\zeta}$ transformacją kanoniczną, jeżeli istnieje funkcja tworząca typu Liego $\mathcal{W}(\boldsymbol{\eta})$, dla której $\boldsymbol{\eta}(\tau)$ są rozwiązaniem równań kanonicznych

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\tau} = \{\, \boldsymbol{\eta}, \mathcal{W}\,\}, \tag{1.198}$$

z warunkami początkowymi $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\zeta}$. Jeśli funkcja $\mathcal{W}$ nie zależy jawnie od czasu t, to jak zwykle, nowy Hamiltonian

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\eta}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})).$$

Funkcja tworząca typu Liego różni się w sposób istotny od klasycznych funkcji F_k zmiennych mieszanych. Przede wszystkim, zależy ona od jednolitego zestawu zmiennych $\boldsymbol{\eta}$ czyli $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P})$. Po drugie, transformacja tożsamościowa ma albo $\mathcal{W} = 0$ (a ogólniej zamiast zera może wystąpić dowolna stała, która znika przy różniczkowaniu), bo wtedy $\frac{d\mathcal{W}}{d\tau} = 0$ i $\boldsymbol{\eta}(\tau) = \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\zeta}$, albo też dowolną funkcję tworzącą $\mathcal{W}$ a tylko parametr $\tau = 0$. Zauważmy, że funkcja tworząca $\mathcal{W}$ w istocie pełni rolę hamiltonianu ze względu na parametr τ jako zmienną niezależną.

Przykład 1.13 – Grupa obrotów

Aby uchwycić istotę transformacji typu Liego przyjrzyjmy się grupie obrotów o kąt α na płaszczyźnie fazowej. Zacznijmy od ustalenia elementarnych faktów:

1. Niech dany będzie układ z dowolną funkcją Hamiltona $\mathcal{H}(\boldsymbol{\zeta})$ zmiennych kanonicznych $\boldsymbol{\zeta} = (x, X)^{\mathrm{T}}$. Ma on równania ruchu

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \{\,\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{H}\,\}.$$

2. Rozpatrzmy drugi zestaw zmiennych kanonicznych $\boldsymbol{\eta}$, powiązanych z $\boldsymbol{\zeta}$ poprzez obrót o pewien stały (tzn. nie zmieniający się w czasie) kąt α:

$$\left[\begin{array}{c} y \\ Y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ X \end{array}\right],$$

czy też krócej $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{M}(\alpha)\,\boldsymbol{\zeta}$.

3. Przedstawiona wyżej transformacja jest kanoniczna dla dowolnej wartości kąta α, gdyż jej macierz Jacobiego $\mathbf{M}(\alpha)$ jest symplektyczna. Łatwo sprawdzić, że faktycznie

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{J}\,\mathbf{M} = \mathbf{J}.$$

Sprawdzimy teraz, że funkcja tworząca typu Liego

$$\mathcal{W}(y, Y) = \tfrac{1}{2}\left(Y^2 + y^2\right), \tag{1.199}$$

generuje obrót o kąt α. Niech α pełni rolę parametru τ transformacji. Mamy wtedy równania

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\alpha} = \{\,\boldsymbol{\eta}, \mathcal{W}\,\},$$

z warunkami początkowymi $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\zeta}$ dla $\alpha = 0$. Rozpisując jawnie na składowe, oznacza to

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial Y} = Y, \quad \frac{dY}{d\alpha} = -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial y} = -y, \quad y(0) = x, \quad Y(0) = X.$$

Powyższe równania to nic innego jak równania oscylacji harmonicznych, gdyż

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = \frac{dY}{d\alpha} = -y,$$

i mają dobrze znane rozwiązanie

$$y(\alpha) = x \cos\alpha + X \sin\alpha, \qquad Y(\alpha) = -x \sin\alpha + X \cos\alpha.$$

Jak widać, funkcja $\mathcal{W}$ z równania (1.199) istotnie definiuje obrót o kąt α na płaszczyźnie fazowej, który to obrót rzeczywiście jest transformacją kanoniczną.

ĆWICZENIA

Zadanie 9.1 Rozpatrzmy zaburzony ruch keplerowski z hamiltonianem

$$\mathcal{K} = -\frac{\mu^2}{2\,L^2} + \mathcal{K}_1.$$

Jakie całki ruchu pojawiają się gdy:

1. $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}1(L, G, H, l, -, h)$.
2. $\mathcal{K}_1 = A(L, G, H) \cos(2g + 2h)$.
3. $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1(L, G, H)$.

Zadanie 9.2 „Zmodyfikowane zmienne Delaunaya" mają pędy $\Phi_1 = L$, $\Phi_2 = L - G$ i $\Phi_3 = G - H$. Znajdź kąty φ_1, φ_2 i φ_3 sprzężone kanonicznie z tymi pędami. Kiedy kąty te są geometrycznie nieokreślone ? Sprawdź, co się wtedy dzieje z odpowiednimi pędami.

Zadanie 9.3 Przez analogię do wzorów (1.150) z Wykładu 7 wprowadź „zmienne nieosobliwe Poincarégo" x, X i y, Y zastępujące zmodyfikowane zmienne Delaunaya φ_2, Φ_2 i φ_3, Φ_3. Sprawdź ich kanoniczność.

Zadanie 9.4 Wypisz i rozwiąż równania ruchu w zmiennych

$$\varphi_1,\, x,\, y, \Phi_1,\, X,\, Y,$$

dla funkcji Hamiltona

$$\mathcal{K} = -\frac{\mu^2}{2\,L^2} - \beta\, H, \tag{21}$$

gdzie β jest dowolnym parametrem. Czy potrafisz zgadnąć jakie zagadnienie opisuje ten hamiltonian ?

Zadanie 9.5 Niech $\boldsymbol{\zeta} = (x, y, z, X, Y, Z)^{\mathrm{T}}$ i $\boldsymbol{\eta} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})^{\mathrm{T}}$. Jaką rodzinę transformacji Liego definiuje funkcja tworząca $\mathcal{W} = \hat{x}\hat{Y} - \hat{y}\hat{X}$? Czy przechodząc do zmiennych Delaunaya $\boldsymbol{\zeta} = (\ell, g, h, L, G, H)^{\mathrm{T}}$ i używając $\mathcal{W} = \hat{x}\hat{Y} - \hat{y}\hat{X} = \hat{H}$ dochodzimy do tych samych wniosków ?