WYKŁAD 8
Zmienne Hilla-Whittakera. Funkcje tworzące transformacji kanonicznych.

Przykład 1.9 – Zmienne Hilla-Whittakera

Zmienne Hilla-Whittakera (znane także jako „biegunowo-węzłowe") otrzymujemy wychodząc od transformacji punktowej ze zmiennych biegunowych $r\, lambda, \varphi$ do położeń

$$\boldsymbol{p} = (r,\, \vartheta,\, \nu)^{\mathrm{T}},$$

gdzie r oznacza promień wodzący, ν – długość węzła wstępującego orbity, zaś $\vartheta = f + \omega$ to argument szerokości (suma anomalii prawdziwej i argumentu perycentrum). Poprzez rozszerzenie kanoniczne tej transformacji otrzymujemy pędy

$$\boldsymbol{P} = (R,\, \Theta,\, N\,)^{\mathrm{T}},$$

które posiadają prostą interpretację fizyczną: R to prędkość radialna, Θ – całkowity moment pędu, N – rzut momentu pędu na oś Oz.

$$\left\{\begin{array}{lllllll} r, & & & \quad & R & = & \dot{r}, \\ \vartheta & = & f+\omega, & \quad & \Theta & = & G = \sqrt{\mu p}, \\ \nu & = & \Omega, & \quad & N & = & G\cos I. \end{array}\right. \tag{1.173}$$

Zagadnienie dwóch ciał zaburzone potencjałem $V_1(\boldsymbol{r}, t)$ posiada w tych zmiennych Hamiltonian

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} + V_1(r, \theta, \nu, \Theta, N, -, t). \tag{1.171}$$

Zmienne Hilla-Whittakera stanowią z jednej strony ważny krok do rozwiązania zagadnienia dwóch ciał w ramach formalizmu kanonicznego, a z drugiej strony są bardzo wygodne w wielu zagadnieniach ruchu zaburzonego.

1.6.3 Transformacje zadane funkcją tworzącą

Niech $\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q})$ i $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P})$. Transformacja $\boldsymbol{\zeta} \leftrightarrow \boldsymbol{\eta}$ jest kanoniczna, jeśli istnieje przynajmniej jeden z czterech rodzajów *funkcji tworzącej zmiennych mieszanych* F_k, spełniający odpowiednio warunki:

$$F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t): \qquad Q_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial p_i}, \tag{1.175}$$

$$F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t): \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \tag{1.176}$$

$$F_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, t): \qquad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \tag{1.177}$$

$$F_4(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t): \qquad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial Q_i}, \quad p_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \tag{1.178}$$

gdzie indeks i przebiega stopnie swobody od 1 do M. Dla każdego typu funkcji tworzącej F_k, nowy Hamiltonian $\mathcal{K}$ jest dany równaniem

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, t) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}, t), t) + \frac{\partial F_k}{\partial t}. \tag{1.179}$$

Nazwa „funkcja tworząca zmiennych mieszanych" wynika z faktu, że zawsze mamy w niej połowę starych i połowę nowych zmiennych.

Przykład 1.10 – Dwie transformacje trywialne

Rozpatrzymy transformację tożsamościową, która nie zmienia zmiennych, to znaczy

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\zeta}, \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}.$$

Transformacja tożsamościowa ma funkcje tworzące typu F_2 i F_3. Są to

$$F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} = q_1 P_1 + \ldots + q_M P_M, \tag{1.180}$$

oraz

$$F_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} = -Q_1 p_1 - \ldots - Q_M p_M, \tag{1.181}$$

Zauważmy, że nie można podać funkcji typu F_1 lub F_4 dla transformacji tożsamościowej. Gdyby jednak przez analogię wypisać

$$F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}, \tag{1.182}$$

to jaką transformację generuje F_1 ? W myśl wzoru (1.175)

$$Q_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial p_i} = -q_i. \tag{1.183}$$

Jakie jest znaczenie transformacji (1.183) ? W jej świetle, pojęcia zmiennych typu „położenie" i zmiennych typu „pęd" okazuje się do pewnego stopnia względne, gdyż formalna zamiana

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{Q}, -\boldsymbol{q})$$

zachowuje postać równań kanonicznych.

Przykład 1.11 – Transformacja Poincarégo (c.d.)

W Przykładzie 1.7 podaliśmy transformację Poincarégo

$$\boldsymbol{\zeta} = (x, X)^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = (\ell, L)^{\mathrm{T}},$$

w wyniku której hamiltonian oscylatora harmonicznego (1.149)

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2} \left(X^2 + \omega^2 x^2 \right),$$

przyjmuje postać (1.151)

$$\mathcal{K} = \omega L.$$

Transformację tę można otrzymać biorąc jako punkt wyjścia zamierzoną postać funkcji Hamiltona $\mathcal{K}$ i poszukując funkcji tworzącej typu F_2

$$X = \frac{\partial F_2(x,L)}{\partial x}, \qquad \ell = \frac{\partial F_2(x,L)}{\partial L}. \tag{1.184}$$

Podstawiając (1.184) do $\mathcal{H}$, możemy napisać

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\omega^2\,x^2}{2} = \omega L,$$

co prowadzi do

$$F_2 = \int \sqrt{2\,\omega\,L - \omega^2\,x^2}\,dx, \tag{1.186}$$

i dalej, poprzez

$$\ell = \frac{\partial F_2}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\int \sqrt{2\,\omega\,L - \omega^2\,x^2}\,dx = \int \frac{\omega\,dx}{\sqrt{2\,\omega\,L - \omega^2\,x^2}},$$

do definicji kąta ℓ

$$\ell = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\,L}{\omega} - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2\,L/\omega}}\right).$$

A zatem, zgodnie z równaniami (1.150)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2\,L/\omega}\,\sin\ell, \\ X &= \sqrt{2\,\omega\,L - \omega^2\,x^2} = \sqrt{2\,\omega\,L}\,\cos\ell. \end{aligned} \tag{1.187}$$

ĆWICZENIA

Zadanie 8.1 Rozszerzenie transformacji punktowej można wykorzystać do zmiany zmiennej niezależnej z czasu t na inną zmienną τ. Mamy wtedy

$$-\mathcal{H}\,dt + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{q} = -\mathcal{K}\,d\tau + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{p}. \tag{19}$$

Wykorzystaj ten fakt w zagadnieniu względnym dwóch ciał, wprowadzając zmienną τ jako uogólnioną anomalię mimośrodową

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\alpha}{r},$$

gdzie α jest dowolną stałą o wymiarze długości. Znajdź nowy hamiltonian w zmiennych Hilla-Whittakera i równania ruchu. Pokaż, że $r(\tau)$ ma postać oscylacji harmonicznych.
Wskazówka: po sformułowaniu równań kanonicznych znajdź $\frac{d^2 r}{d\tau^2}$.

Zadanie 8.2 Komety w Obłoku Oorta podlegają nie tylko przyciąganiu Słońca, lecz również zaburzającej ich ruch sile pływowej dysku Galaktyki

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\,\boldsymbol{r} - \varepsilon^2\,\boldsymbol{z}, \tag{20}$$

gdzie powyższe równania ruchu wypisane są dla heliocentycznego układu współrzędnych z osią Oz skierowaną do bieguna galaktycznego.

Podaj funkcję Hamiltona tego zagadnienia w zmiennych Hilla-Whittakera i kanoniczne równania ruchu w tych zmiennych. Która ze zmiennych nie pojawiła się w hamiltonianie i z czego wynika jej nieobecność ? Ile całek ruchu posiada to zagadnienie ?