WYKŁAD 5
Ruch w potencjale radialnym. Formalizm kanoniczny – transformacja Legendre'a.

1.4.2 Ruch cząstki w potencjale radialnym

Do opisu ruchu w potencjale posiadającym symetrię sferyczną (potencjale radialnym) o ogólnej postaci $V = V(r)$ wprowadzamy zmienne biegunowe

$$q_1 = r,\ q_2 = \lambda,\ q_3 = \varphi.$$

Równania transformacji mają postać

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{1.104}$$

a różniczkując je względem czasu otrzymamy

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\frac{x}{r} - \dot{\lambda}\, y - \dot{\varphi}\, z\cos\lambda \\ \dot{r}\frac{y}{r} + \dot{\lambda}\, x - \dot{\varphi}\, z\sin\lambda \\ \dot{r}\frac{z}{r} + \dot{\varphi}\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \tag{1.105}$$

Funkcja Lagrange'a na jednostkę masy ma dla dowolnego potencjału postać

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + (r\cos\varphi)^2\dot{\lambda}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right] - V \tag{1.107}$$

i na jej podstawie możemy wypisać trzy równania ruchu (1.102).

$$\ddot{r} - r\,\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}^2 - r\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r}. \tag{1.108}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \lambda}. \tag{1.109}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) + r^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\lambda}^2 = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \tag{1.110}$$

Jeśli potencjał jest radialny, to $\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ i ostatnie dwa równania upraszczają się do

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}\right) = 0, \tag{1.112}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) + r^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\lambda}^2 = 0. \tag{1.113}$$

Wnioski:

1. Wszystkie orbity w tym zagadnieniu są krzywymi płaskimi, gdyż istnieje rozwiązanie trywialne $\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0$, osiągalne przez odpowiedni wybór płaszczyzny odniesienia (symetria sferyczna zagadnienia !).

2. Każde zagadnienie z potencjałem radialnym posiada całkę pól

$$r^2\,\dot{\lambda} = G = \text{ const.} \tag{1.114}$$

3. Każde zagadnienie radialne jest całkowalne.

4. W każdym zagadnieniu radialnym z przyciąganiem istnieją orbity kołowe.

1.5 Formalizm kanoniczny

Formalizm kanoniczny nazywany jest również formalizmem Hamiltona a czasami formalizmem symplektycznym. Podstawowe pojęcia tego formalizmu to położenia i pędy uogólnione oraz funkcja Hamiltona. Ruch układu mechanicznego zadany jest poprzez równania kanoniczne Hamiltona.

1.5.1 Transformacja Legendre'a i równania Hamiltona

Rozpatrzmy układ mechaniczny o M stopniach swobody, opisany poprzez M współrzędnych uogólnionych q_i i posiadający funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}$. Transformacja Legendre'a to odwzorowanie

$$\{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \mathcal{L}\} \longrightarrow \{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \mathcal{H}\}$$

które zestawowi współrzędnych i prędkości uogólnionych przypisuje położenia i pędy uogólnione a funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ – nową funkcję stanu $\mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$, zwaną funkcją Hamiltona lub hamiltonianem.

- Pędy uogólnione $\boldsymbol{Q}$

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, M. \tag{1.118}$$

- Hamiltonian

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t) = \boldsymbol{Q}\cdot \dot{\boldsymbol{q}} - \mathcal{L}, \tag{1.119}$$

- kanoniczne równania ruchu (równania Hamiltona)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \qquad \dot{Q}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \tag{1.120}$$

> **TWIERDZENIE 1.2** Jeżeli hamiltonian $\mathcal{H}$ pewnego układu nie zależy od czasu jawnie, to jest on całką ruchu
>
> $$\mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}) = \text{ const.} \tag{1.122}$$

Hamiltonian układu jest jego energią całkowitą jeśli spełnione są dwa warunki

- Transformacja z wektorów położenia $\boldsymbol{r}$ w inercjalnym układzie odniesienia do położeń uogólnionych $\boldsymbol{q}$ nie zależy jawnie od czasu.
- Potencjał układu $V(\boldsymbol{q})$ nie zależy jawnie od czasu.

Jeśli spełniony jest pierwszy z wyżej wymienionych warunków, to można konstruować funkcję Hamiltona na podstawie wzoru

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t) = T(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}) + V(\boldsymbol{q}, t). \tag{1.124}$$

Przykład 1.6 – Wahadło matematyczne

Funkcja Hamiltona wahadła matematycznego

$$\mathcal{H}(\varphi, \Phi) = \tfrac{1}{2}\Phi^2 - \omega_0^2 \cos\varphi. \tag{1.125}$$

$\mathcal{H}$ = const. jest całką energii wahadła. Równania ruchu Hamiltona (1.120) przyjmują dla wahadła matematycznego postać

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} = \Phi, \qquad \dot{\Phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -\omega_0^2 \sin\varphi. \tag{1.126}$$

ĆWICZENIA

Zadanie 5.1 Znajdź funkcję Lagrange'a i równania ruchu względnego zagadnienia dwóch ciał we współrzędnych kartezjańskich x, y, z. Następnie przeprowadź transformację Legendre'a znajdując pędy X, Y, Z, hamiltonian i równania kanoniczne ruchu.

Zadanie 5.2 Przeprowadź transformację Legendre'a dla zmiennych biegunowych $\boldsymbol{q}$ (1.104) i funkcji Lagrange'a (1.107). Znajdź pędy $\boldsymbol{Q} = (R, \Lambda, \Phi)^{\mathrm{T}}$, funkcję Hamiltona i wypisz kanoniczne równania ruchu.

Zadanie 5.3 Udowodnij, że pęd Λ, sprzężony kanonicznie z długością λ, to rzut momentu pędu na oś Oz.

Zadanie 5.4 Stosując Hamiltonian z Zadania 5.2 z potencjałem $V = -\mu r^{-1}$, znajdź związek między energią całkowitą $E = \mathcal{H}$ a momentem pędu dla orbit eliptycznych i dla orbity kołowej. Wskazówka: w perycentrum i apocentrum $R = 0$.