WYKŁAD 4
Elementy nieosobliwe. Zastosowania równań Gaussa. Formalizm Lagrange'a

1.3.7 Elementy nieosobliwe

Jeżeli $e = 0$, to nie wolno używać wzorów dla $\dot{e}$, $\dot{M}$ i $\dot{\omega}$ gdyż albo wystąpi dzielenie przez zero albo odwołamy się do nieokreślonych kątów f i E. Natomiast jeśli $I = 0$ lub $I = \pi$, to nie wolno używać równań dla $\frac{dI}{dt}$ lub $\dot{\Omega}$, gdyż albo wystąpi dzielenie przez zero albo pojawi się nieokreślony kąt $f + \omega$. W takich sytuacjach stosujemy tzw. elementy nieosobliwe, będące funkcjami elementów keplerowskich. Dla I bliskich 0 są to

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q & = & \sin \frac{I}{2} \cos \Omega, \\ p & = & \sin \frac{I}{2} \sin \Omega, \\ \varpi & = & \omega + \Omega, \end{array} \right. \tag{1.91}$$

a dla małych mimośrodów

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k & = & e \cos \varpi, \\ h & = & e \sin \varpi, \\ \lambda & = & M + \varpi. \end{array} \right. \tag{1.92}$$

Odpowiednia modyfikacja równań Gaussa prowadzi wtedy do uniknięcia osobliwości. Na przykład, dla małych mimośrodów używamy

$$\dot{\lambda} = \dot{M} + \dot{\varpi},$$

oraz

$$\dot{k} = \dot{e} \cos \varpi - e \, \dot{\varpi} \sin \varpi,$$

i analogiczny wzór dla $\dot{h}$.

1.3.8 Niektóre zastosowania równań Gaussa

Przykład 1.3 – Wpływ oporu ośrodka na elementy oskulacyjne.

Rozpatrzmy względne zagadnienie dwóch ciał w którym na badaną masę działa hamująca siła $\boldsymbol{P}$ wywołana oporem nieruchomego ośrodka. Siła tego rodzaju skierowana jest stycznie do chwilowej orbity, w kierunku przeciwnym do wektora prędkości. Możemy więc zauważyć, że jej składowe w bazie n-s-b maja wartości

$$S = S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) < 0, \quad N = B = 0,$$

gdzie bez względu na postać zależności tarcia od położenia ciała $\boldsymbol{r}$ i jego prędkości $\boldsymbol{v}$, poprzestajemy jedynie na stwierdzeniu, że $S < 0$ a więc opór nie zanika ani (tym bardziej) nie zmienia znaku. Równania Gaussa (1.84–1.88) upraszczają się do

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2\,v}{n^2\,a}\,S < 0, \\
\dot{e} &= \frac{2\,p\,S}{r\,v}\cos E, \\
\frac{dI}{dt} &= \dot{\Omega} \;=\; 0, \\
\dot{\omega} &= \frac{2\,S}{e\,v}\,\sin f.
\end{aligned}
\tag{1.93}
$$

Wnioski:

1. Półoś wielka orbity systematycznie maleje, gdyż $\dot{a} < 0$. W konsekwencji musi nastąpić kolizja obu mas zagadnienia dwóch ciał.
2. Trajektoria w tym zagadnieniu jest krzywą płaską ($I = \text{const}$ i $\Omega = \text{const}$).
3. Zmiany oskulacyjnego mimośrodu zależą w sposób istotny od położenia badanej masy na orbicie: w pobliżu perycentrum ($\cos E > 0$) opór ośrodka zmniejsza mimośród ($\dot{e} < 0$) natomiast w pobliżu apocentrum ($\cos E < 0$) mimośród rośnie ($\dot{e} > 0$). W typowych sytuacjach fizycznych wpływ w pobliżu perycentrum jest silniejszy i mimośród systematycznie maleje.

Wniosków co do mimośrodu nie należy ekstrapolować i mówić, że mimośród dąży do zera, ponieważ równania Gaussa dla $\dot{e}$ nie wolno stosować dla małych mimośrodów.

Przykład 1.4 – Manewry orbitalne (zmiana nachylenia)

Manewr orbitalny to zmiana elementów orbity dokonywana przy pomocy silników korekcyjnych sztucznego satelity lub sondy kosmicznej. Przybliżenie impulsowe natomiast zakłada, że silniki działają stałą siła $\boldsymbol{P}$ (zwaną **ciągiem**) przez krótki czas Δt i zmiana w dowolnym elemencie orbity (na przykład w półosi wielkiej a) może być przedstawiona jako

$$\Delta a \approx \dot{a}\,\Delta t. \tag{1.94}$$

W każdym manewrze orbitalnym dąży się do uzyskania zamierzonej orbity przy minimalnym wydatku paliwa, co oznacza, że staramy się użyć jak najmniejszego **impulsu** (zwanego również popędem)

$$W = |\boldsymbol{P}|\,\Delta t. \tag{1.95}$$

W świetle równania Gaussa (1.86) jedynie składowa binormalna powoduje zmianę nachylenia orbity I, a zatem siła powodująca manewr powinna być skierowana prostopadle do płaszczyzny orbity i odpowiada jej impuls

$$W = B\,\Delta t.$$

Uzyskany przyrost nachylenia dany będzie wzorem

$$\Delta I = \frac{r\,\cos\left(f+\omega\right)}{\sqrt{\mu\,p}}\,W. \tag{1.96}$$

Aby uzyskać największy przyrost ΔI przy zadanym W, musimy znaleźć maksimum funkcji $r\,\cos\left(f+\omega\right)$ z warunku

$$\frac{d\left(r\,\cos\left(f+\omega\right)\right)}{df} = 0.$$

Uwzględniając zależność $r(f)$ otrzymamy

$$\frac{r}{p}\,e\,\sin f\,\cos\left(f+\omega\right) - \sin\left(f+\omega\right) = 0. \tag{1.97}$$

Dla małych wartości mimośrodu orbity e równanie (1.97) prowadzi do wniosku, że manewr zmiany nachylenia należy przeprowadzić w okolicach jednego z węzłów orbity, gdy $(f+\omega) \approx 0$ lub π. Zauważmy również, że przyrost I jest wprost proporcjonalny do odległości r („ramię siły") a zatem szczególnie uprzywilejowana będzie sytuacja, w której linia apsyd i linia węzłów pokrywają się, aby manewr można przeprowadzić zarazem w węźle i w apocentrum.

1.4 Formalizm Lagrange'a

1.4.1 Podstawowe pojęcia

Formalizm Lagrange'a to opis układów mechanicznych w kategoriach trzech podstawowych pojęć:

1. współrzędnych i prędkości uogólnionych,

2. funkcji Lagrange'a,

3. równań ruchu Lagrange'a drugiego rodzaju.

Rozpatrzmy układ, który ma N stopni swobody W miejsce dotychchczasowych zmiennych kartezjańskich $\boldsymbol{r}$ w układzie inercjalnym wprowadzimy współrzędne uogólnione $\boldsymbol{q}$, które mogą być dowolnymi funkcjami $\boldsymbol{r}$ (ale nie $\dot{\boldsymbol{r}}$!) i dodatkowo zależeć jawnie od czasu. Różniczkując współrzędne uogólnione względem czasu, uzyskujemy prędkości uogólnione $\dot{\boldsymbol{q}}$ a więc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} q_i & = & q_i(\boldsymbol{r}, t), \\ \dot{q}_i & = & \frac{dq_i}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla q_i + \frac{\partial q_i}{\partial t}, \end{array} \right. \tag{1.98}$$

gdzie $i = 1, \ldots, N$. Funkcja Lagrange'a

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - V(\boldsymbol{q}, t), \tag{1.100}$$

zwaną jest także lagranżjanem lub potencjałem kinetycznym. Znając potencjał kinetyczny $\mathcal{L}$ układu o N stopniach swobody możemy otrzymać *równania Lagrange'a drugiego rodzaju*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.102}$$

Tworzą one układ równań ruchu rzędu $2N$, składający się z N równań drugiego rzędu.

Zauważmy, że równania Lagrange'a (1.102) nie ulegają zmianie jeśli funkcję $\mathcal{L}$ podzielimy przez dowolna stałą – na przykład masę badanego ciała.

Przykład 1.5 – Wahadło matematyczne

Jak wiemy już z Przykładu 1.1, najbardziej dogodną zmienną do opisu ruchu wahadła o masie m zawieszonego na pręcie od długości l jest kąt $q_1 = \varphi$. Energia kinetyczna wahadła przyjmuje postać

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że prędkość linowa w niejednostajnym ruchu po okręgu $v = l\,\dot{\varphi}$. W jednorodnym polu grawitacyjnym potencjał siły $\boldsymbol{F} = (mg, 0)^T$ ma postać

$$V = -mg\,x = -mgl\cos\varphi.$$

Funkcję Lagrange'a $\mathcal{L} = T - V$ układu możemy podzielić przez dowolną stałą – niech będzie nią iloczyn ml^2. Otrzymujemy

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \omega_0^2\,\cos\varphi, \tag{1.103}$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Łatwo sprawdzić, że równanie ruchu Lagrange'a drugiego rodzaju otrzymywane z tej funkcji $\mathcal{L}$ jest identyczne z (1.9).

ĆWICZENIA

Zadanie 4.1 Wyprowadź równania Gaussa dla elementów nieosobliwych względem małych nachyleń

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \frac{r\,B}{2\sqrt{\mu\,p}\,\sqrt{1-q^2-p^2}} \begin{pmatrix} 1-q^2, & -p\,q \\ -p\,q, & 1-p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

oraz

$$\dot{\varpi} = \Psi + \frac{r\,B}{\sqrt{\mu\,p}\,\sqrt{1-q^2-p^2}}(q\,\sin\vartheta - p\,\cos\vartheta), \tag{11}$$

gdzie $\vartheta = f + \varpi$, oraz $\Psi = \dot{\omega} + c\,\dot{\Omega}$ jest nieosobliwym przy $I = 0$ składnikiem równania dla $\dot{\omega}$.

Zadanie 4.2 Wyprowadź równanie Gaussa dla długości średniej $\lambda = M + \varpi$

$$\dot{\lambda} = n - \frac{2\,r\,R}{n\,a^2} + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\dot{\varpi} + 2\,\sqrt{1-e^2}\,\sin^2\tfrac{I}{2}\,\dot{\Omega}. \tag{12}$$

Sprawdź, czy po wstawieniu wzorów na $\dot{\varpi}$ i $\dot{\Omega}$ jest ono rzeczywiście nieosobliwe dla $e =$ i $I = 0$.

Zadanie 4.3 Przyjrzyj się równaniom dla zmiennych h, k i uzasadnij ich nieosobliwość

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= \frac{\sqrt{1-k^2-h^2}}{n\,a}\Bigg[\,R\,\sin\vartheta \\
&\quad +T\left(\cos\vartheta + k + \frac{r}{a\,(1-k^2-h^2)}\,\left((1-k^2)\,\cos\vartheta - h\,k\,\sin\vartheta\right)\right)\Bigg] \\
&\quad -\frac{h\,r\,B}{2\,\sqrt{\mu\,p}\,\sqrt{1-q^2-p^2}}\,(q\,\sin\vartheta - p\,\cos\vartheta), \qquad (13) \\
\dot{h} &= \frac{\sqrt{1-k^2-h^2}}{n\,a}\Bigg[\,-R\,\cos\vartheta \\
&\quad +T\left(\sin\vartheta + h + \frac{r}{a\,(1-k^2-h^2)}\,\left((1-h^2)\,\sin\vartheta - h\,k\,\cos\vartheta\right)\right)\Bigg] \\
&\quad -\frac{k\,r\,B}{2\,\sqrt{\mu\,p}\,\sqrt{1-q^2-p^2}}\,(q\,\sin\vartheta - p\,\cos\vartheta). \qquad (14)
\end{aligned}$$

Czy dla $e = 0$ lub $I = 0$ pojawia się dzielenie przez zero ? Czy używa się źle określonych kątów ? Czy istnieje możliwość otrzymania ujemnego mimośrodu jako rozwiązania tych równań ? Czy ta ostatnia możliwość istnieje w przypadku osobliwego równania (1.85).

Zadanie 4.4 Załóżmy, że w zagadnieniu płaskim ($I = 0$) zaburzenie posiada jedynie radialną składową $R \neq 0$. Czy możliwy jest w tym zagadnieniu ruch po orbicie ze stałym mimośrodem $e = 0$? Porównaj odpowiedź z punktu widzenia równań (1.85) oraz (13) i (14).

Zadanie 4.5 W zagadnieniu z Zadania 4.4 ruch po orbicie ze stałym mimośrodem jest możliwy tylko wtedy, gdy ciało znajduje się cały czas w perycentrum lub apocentrum. Zweryfikuj ten fakt badając warunek

$$\dot{e} = \frac{d\sqrt{k^2+h^2}}{dt} = 0,$$

w połączeniu z równaniami (13) i (14). Wyjaśnij pozorny paradoks, że dla małych R okres obiegu jest nadal bliski $2\pi/n$, chociaż ciało nie opuszcza linii apsyd.