WYKŁAD 3
Równania Gaussa dla e, I, Ω, ω, M.

1.3.3 Od całki pól do $\dot{e}$, $\dot{\Omega}$, $\frac{dI}{dt}$

W odróżnieniu od skalarnej całki sił żywych, wektorowa całka pól może nam posłużyć do otrzymania aż trzech kolejnych równań Gaussa.

$$\dot{\boldsymbol{G}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}. \tag{1.53}$$

W bazie r-t-b

$$\dot{\boldsymbol{G}} = r\,T\,\hat{\boldsymbol{b}} - r\,B\,\hat{\boldsymbol{t}}. \tag{1.54}$$

Poza tym

$$\dot{\boldsymbol{G}} = \frac{d}{dt}\left(G\,\hat{\boldsymbol{b}}\right) = \dot{G}\,\hat{\boldsymbol{b}} + G\,\frac{d\,\hat{\boldsymbol{b}}}{dt}. \tag{1.55}$$

Przyrównując stronami (1.54) i (1.55) otrzymujemy wektorowe równanie

$$\dot{G}\,\hat{\boldsymbol{b}} + G\,\frac{d\,\hat{\boldsymbol{b}}}{dt} - r\,T\,\hat{\boldsymbol{b}} + r\,B\,\hat{\boldsymbol{t}} = 0. \tag{1.56}$$

Równania dla $\dot{G}$ i $\dot{e}$

Infinitezymalny obrót wersora $\hat{\boldsymbol{b}}$ podlega elementarnej tożsamości

$$\hat{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{b}}}{dt} = 0. \tag{1.57}$$

Dzięki tej właściwości możemy pomnożyć skalarnie obie strony (1.56) przez wersor $\hat{\boldsymbol{b}}$ i otrzymujemy

$$\dot{G} = r\,T. \tag{1.58}$$

Ponieważ $G = \sqrt{\mu\,p} = \sqrt{\mu\,a\,(1-e^2)}$, a znamy już równania dla $\dot{a}$, możemy wyznaczyć

$$\dot{e} = \frac{1}{a\,e}\left(\frac{p}{2\,a}\,\dot{a} - \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,\dot{G}\right).$$

(końcowy wynik w rozdz. 1.3.6)

Równania dla $\frac{dI}{dt}$ i $\dot{\Omega}$.

Po uwzględnieniu równości (1.58) pozostaje nam uproszczona postać wzoru (1.56)

$$G\,\frac{d\,\hat{\boldsymbol{b}}}{dt} = -\,r\,B\,\hat{\boldsymbol{t}}. \tag{1.61}$$

Musimy teraz powiązać infinitezymalny obrót $d\hat{\boldsymbol{b}}$ względem stałych osi $Oxyz$ ze zmianami nachylenia dI oraz długości węzła wstępującego $d\Omega$ względem układu

$Oxyz$ o stałych osiach.

Ważne twierdzenie o obrocie infinitezymalnym

Niech kąty ϕ, ϑ, ψ definiują obrót z bazy $(\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ poprzez $(\hat{\boldsymbol{i}}', \hat{\boldsymbol{j}}', \hat{\boldsymbol{k}}')$ do $(\hat{\boldsymbol{i}}'', \hat{\boldsymbol{j}}'', \hat{\boldsymbol{k}}'')$ tak, aby

$$\hat{\boldsymbol{i}}' = \mathcal{X}_3(\phi)\, \hat{\boldsymbol{i}}, \quad \hat{\boldsymbol{j}}' = \mathcal{X}_3(\phi)\, \hat{\boldsymbol{j}}, \quad \hat{\boldsymbol{k}}' = \mathcal{X}_3(\phi)\, \hat{\boldsymbol{k}}, \tag{1.62}$$

oraz

$$\hat{\boldsymbol{i}}'' = \mathcal{X}_3(\psi)\mathcal{X}_1(\vartheta)\, \hat{\boldsymbol{i}}', \quad \hat{\boldsymbol{j}}'' = \mathcal{X}_3(\psi)\mathcal{X}_1(\vartheta)\, \hat{\boldsymbol{j}}', \quad \hat{\boldsymbol{k}}'' = \mathcal{X}_3(\psi)\mathcal{X}_1(\vartheta)\, \hat{\boldsymbol{k}}', \tag{1.63}$$

gdzie $\mathcal{X}_i(\alpha)$ są macierzami obrotu o kąt α względem i-tej osi układu.

TWIERDZENIE 1.1 Niech wektor $\boldsymbol{w} = w\, \hat{\boldsymbol{w}}$ będzie sztywno związany z bazą $(\hat{\boldsymbol{i}}'', \hat{\boldsymbol{j}}'', \hat{\boldsymbol{k}}'')$ (może to być na przykład jeden z jej wersorów). Wpływ infinitezymalnych przyrostów $d\phi$, $d\vartheta$, $d\psi$ na składowe $\boldsymbol{w}$ względem bazy $(\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ dany jest wzorem

$$d\hat{\boldsymbol{w}} = (\hat{\boldsymbol{k}}\, d\phi + \hat{\boldsymbol{i}}'\, d\vartheta + \hat{\boldsymbol{k}}''\, d\psi) \times \hat{\boldsymbol{w}}. \tag{1.64}$$

Dowód tego twierdzenia znaleźć można w podręcznikach mechaniki klasycznej (np. W. Rubinowicz i W. Królikowski *Mechanika teoretyczna*, PWN, 1980, Rozdz. IV, §2.).

Jak wiemy z *Wstępu do mechaniki nieba*, transformację z bazy $(\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ układu $Oxyz$ do bazy r-t-b $(\hat{\boldsymbol{i}}'', \hat{\boldsymbol{j}}'', \hat{\boldsymbol{k}}'') = (\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{b}})$ uzyskujemy przyjmując kąty Eulera równe

$$\phi = \Omega, \quad \vartheta = I, \quad \psi = f + \omega.$$

Możemy więc powiązać zmianę wersora $d\hat{\boldsymbol{b}}$ ze zmianami kątów Eulera przywołując wzór (1.64)

$$d\hat{\boldsymbol{b}} = (\hat{\boldsymbol{k}}\, d\Omega + \hat{\boldsymbol{i}}'\, dI + \hat{\boldsymbol{b}}\, d\psi) \times \hat{\boldsymbol{b}} = (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{b}})\, d\Omega + (\hat{\boldsymbol{i}}' \times \hat{\boldsymbol{b}})\, dI. \tag{1.65}$$

Podstawiając ten związek do (1.61) otrzymujemy równanie wektorowe

$$(\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{b}})\, \dot{\Omega} + (\hat{\boldsymbol{i}}' \times \hat{\boldsymbol{b}})\, \frac{dI}{dt} = -\frac{r\, B}{G}\, \hat{\boldsymbol{t}}. \tag{1.66}$$

Mnożąc (1.66) przez $\hat{\boldsymbol{k}}$ lub $\hat{\boldsymbol{i}}'$ można otrzymać dwa równania skalarne

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{k}} \cdot (\hat{\boldsymbol{i}}' \times \hat{\boldsymbol{b}})\, \frac{dI}{dt} &= -\frac{r\, B}{G}\, \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}, & (1.67) \\ \hat{\boldsymbol{i}}' \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{b}})\, \dot{\Omega} &= -\frac{r\, B}{G}\, \hat{\boldsymbol{i}}' \cdot \hat{\boldsymbol{t}}, & (1.68) \end{aligned}$$

a z nich

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r\,\cos(f+\omega)}{G}\,B, \tag{1.69}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r\,\sin(f+\omega)}{G\,s}\,B, \tag{1.70}$$

gdzie $s = \sin I$ oznacza sinus nachylenia.

1.3.4 Od wektora Laplace'a do $\dot{\omega}$

Różniczkując definicję całki Laplace'a $\boldsymbol{e}$ dostaniemy

$$\dot{\boldsymbol{e}} \;=\; \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\mu}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{G} - \hat{\boldsymbol{r}}\right] = \frac{1}{\mu}\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{G} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{G}} - \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt},$$

a zatem

$$\mu\,\dot{\boldsymbol{e}} \;=\; \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{G} + \boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}). \tag{1.71}$$

Poprzez elementarne operacje wektorowe można równanie (1.71) sprowadzić do postaci

$$\mu\,\dot{\boldsymbol{e}} \;=\; 2\,G\,T\,\hat{\boldsymbol{r}} - (G\,R + r\,\dot{r}\,T)\,\hat{\boldsymbol{t}} - r\,\dot{r}\,B\,\hat{\boldsymbol{b}}, \tag{1.72}$$

w bazie r-t-b.

Musimy teraz zająć się lewą stroną (1.72) aby powiązać $\dot{\boldsymbol{e}}$ ze zmianami elementów oskulacyjnych. Zdefiniujmy pomocniczą „bazę perycentryczną” ($\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$) związaną z kierunkiem do perycentrum orbity. Transformacja z $(\hat{\boldsymbol{i}},\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{k}})$ do bazy perycentrycznej oparta jest o kąty Eulera 3-1-3

$$\phi = \Omega, \quad \vartheta = I, \quad \psi = \omega.$$

Korzystając z Twierdzenia 1.1 możemy przedstawić $\dot{\boldsymbol{e}}$ w postaci

$$\dot{\boldsymbol{e}} \;=\; \dot{e}\,\hat{\mathbf{e}} + e\,\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} = \dot{e}\,\hat{\mathbf{e}} + e\,\left(\dot{\Omega}\,\hat{\boldsymbol{k}} + \frac{dI}{dt}\,\hat{\boldsymbol{i}}' + \dot{\omega}\,\hat{\boldsymbol{b}}\right)\times\hat{\mathbf{e}} \tag{1.73}$$

Przyrównując stronami (1.72) i (1.73) dochodzimy do wektorowego równania

$$\mu\,\dot{e}\,\hat{\mathbf{e}} + \mu\,e\,\left(\dot{\Omega}\,\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\mathbf{e}} + \frac{dI}{dt}\,\hat{\boldsymbol{i}}'\times\hat{\mathbf{e}} + \dot{\omega}\,\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}}\right) \;=\; 2\,G\,T\,\hat{\boldsymbol{r}} - (G\,R + r\,\dot{r}\,T)\,\hat{\boldsymbol{t}} - r\,\dot{r}\,B\,\hat{\boldsymbol{b}}. \tag{1.74}$$

Aby wydobyć z układu (1.74) interesujący nas składnik $\dot{\omega}$ pomnóżmy obie strony skalarnie przez wektor $(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}})$. Jest to wektor ortogonalny do $\hat{\mathbf{e}}$ oraz do $\hat{\boldsymbol{b}}$ dzięki czemu dwa wyrazy (1.74) znikają od razu i mamy

$$\dot{\Omega}\,(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\mathbf{e}})\cdot(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}}) + \frac{dI}{dt}\,(\hat{\boldsymbol{i}}'\times\hat{\mathbf{e}})\cdot(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}}) + \dot{\omega}\,(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}})\cdot(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}}) \;=\; = \frac{2\,G\,T}{\mu\,e}\,\hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}}) - \frac{G\,R + r\,\dot{r}\,T}{\mu\,e}\,\hat{\boldsymbol{t}}\cdot(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\mathbf{e}}). \tag{1.75}$$

Pozostaje już tylko wykonanie odpowiednich iloczynów wersorów, co prowadzi do końcowej postaci

$$\dot{\omega} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-R\,\cos f + T\,\left(1+\tfrac{r}{p}\right)\,\sin f\right] - c\,\dot{\Omega}, \tag{1.76}$$

w bazie r-t-b, lub

$$\dot{\omega} = \frac{1}{v\,e}\left[2\,S\,\sin f - N\,\left(e+\tfrac{e+\cos f}{1+e\,\cos f}\right)\right] - c\,\dot{\Omega}, \tag{1.77}$$

w bazie n-s-b. W obu wzorach $c = \cos I$.

1.3.5 Równania dla zmian anomalii

Punktem wyjścia będzie Twierdzenie 1.1, które zastosujemy nie do całki ruchu a do wektora $\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{r}}$ w bazie r-t-b. Kąty Eulera są tu identyczne jak w problemie $\dot{\boldsymbol{G}}$ tzn. $\phi = \Omega$, $\vartheta = I$, $\psi = f + \omega$. Zauważmy, że bez względu na obecność zaburzenia $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$, a więc prawa strona równań będzie prostsza niż w poprzednich przypadkach. Istotnie,

$$\frac{d(r\,\hat{\boldsymbol{r}})}{dt} = \boldsymbol{v}$$

prowadzi do

$$\dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\left(\dot{\Omega}\,\hat{\boldsymbol{k}} + \frac{dI}{dt}\,\hat{\boldsymbol{i}}' + (\dot{\omega}+\dot{f})\,\hat{\boldsymbol{b}}\right)\times\hat{\boldsymbol{r}} \quad = \quad \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{G}{r}\,\hat{\boldsymbol{t}}.$$

Jeśli pomnożymy skalarnie obie strony przez wersor $\hat{\boldsymbol{t}}$, to otrzymamy

$$\dot{f} = \frac{G}{r^2} - \dot{\omega} - c\,\dot{\Omega}. \tag{1.79}$$

Aby znaleźć związek między $\dot{E}$ a $\dot{f}$ w przypadku zaburzonym, zróżniczkujmy funkcję

$$\frac{r}{a} = 1 - e\,\cos E = \frac{1-e^2}{1+e\,\cos f}.$$

Uwzględniając możliwość zmian mimośrodu dostaniemy

$$-\cos E\,\dot{e} + e\sin E\,\dot{E} \quad = \quad -\frac{r}{p}\left[2\,e + \frac{r}{a}\,\cos f\right]\,\dot{e} + \frac{e\,r^2\,\sin f}{a\,p}\,\dot{f}. \tag{1.80}$$

Po niezbyt wyrafinowanych przekształceniach uwzględniających

$$r = a\,(1-\,e\,\cos E), \quad r\,\sin f = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E, \quad r\,\cos f = a\,(\cos E - e),$$

równanie (1.80) przyjmuje postać

$$\dot{E} = \frac{r}{a\,\sqrt{1-e^2}}\,\dot{f} - \frac{\sin E}{1-e^2}\,\dot{e}. \tag{1.81}$$

Związek między $\dot{E}$ i $\dot{M}$ możemy łatwo uzyskać różniczkując równanie Keplera

$$M = E - e\,\sin E.$$

Uwzględniając zmienność mimośrodu otrzymujemy

$$\dot{M} = \frac{r}{a}\,\dot{E} - \dot{e}\,\sin E,$$

a po uwzględnieniu (1.81)

$$\dot{M} = \frac{r^2}{a^2\,\sqrt{1-e^2}}\,\dot{f} - \left(1 + \frac{r}{p}\right)\,\sin E\,\dot{e}.$$

Wystarczy już tylko podstawić pochodną $\dot{f}$ daną wzorem (1.79) i wykonać szereg elementarnych przekształceń z wykorzystaniem wzorów zagadnienia dwóch ciał aby przekonać się, że

$$\begin{aligned}\dot{M} &= n - \frac{r^2}{a^2\,\sqrt{1-e^2}}\,(\,\dot{\omega} + c\,\dot{\Omega}) - \left(1 + \frac{r}{p}\right)\,\sin E\,\dot{e} \\ &= n - \frac{2\,r}{n\,a^2}\,R\,-\sqrt{1-e^2}\,(\,\dot{\omega} + c\,\dot{\Omega}).\end{aligned} \tag{1.82}$$

Co prawda użyliśmy zgodnego z III prawem Keplera podstawienia

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \tag{1.83}$$

ale musimy pamiętać, że w ruchu zaburzonym jest to już tylko związek definiujący umowny symbol n. Możemy nazywać n oskulacyjnym ruchem średnim ale musimy pamiętać, że w ogólności

$$n \neq \dot{M}.$$

1.3.6 Zestawienie wzorów

Równania dla pięciu elementów oskulacyjnych orbity eliptycznej:

$$\dot{a} = \frac{2\,a^2}{\mu}\,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{2}{n\,\sqrt{1-e^2}}\,\left[R\,e\,\sin f + T\,\frac{p}{r}\right] = \frac{2\,v}{n^2\,a}\,S, \tag{1.84}$$

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \frac{1}{\mu\,a\,e}\,\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{r} + (a\,p - r^2)\,\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{P} \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a}\,\left[R\,\sin f + T\,(\cos f + \cos E)\right] \\ &= \frac{1}{v}\,\left[S\,\frac{2\,p}{r}\,\cos E + N\,\sqrt{1-e^2}\,\sin E\right],\end{aligned} \tag{1.85}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r\,\cos\left(f+\omega\right)}{\mu\,p}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{P} = \frac{r\,\cos\left(f+\omega\right)}{\sqrt{\mu\,p}}\,B, \tag{1.86}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega} &= -\frac{r}{\mu\,p\,e}\left[\frac{\sqrt{\mu\,p}}{r}\,(\cos E + e)\,\boldsymbol{r} - (p+r)\sin f\,\boldsymbol{v}\right]\cdot \boldsymbol{P} - c\dot{\Omega} \\
&= \frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-R\,\cos f + T\,\left(1+\frac{r}{p}\right)\,\sin f\right] - c\dot{\Omega} \\
&= \frac{1}{e\,v}\,\left[2\,S\,\sin f - N\,(e+\cos E)\right] - c\,\dot{\Omega}, \qquad (1.87) \\
\dot{\Omega} &= \frac{r\,\sin\left(f+\omega\right)}{s\,\mu\,p}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{P} = \frac{r\,\sin\left(f+\omega\right)}{s\,\sqrt{\mu\,p}}\,B. \qquad (1.88)
\end{aligned}
$$

Do tego dochodzi szóste równanie dla anomalii średniej

$$
\begin{aligned}
\dot{M} &= n - \frac{1}{n\,a^2}\left[2\,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r} + \sqrt{\mu p}\,\left(\dot{\omega} + c\dot{\Omega}\right)\right] \\
&= n - \frac{1}{n\,a^2\,e}\,\left[\,R\,(2\,r\,e - p\,\cos f) + T\,(r+p)\,\sin f\,\right] \\
&= n - \frac{\sqrt{1-e^2}}{v\,e}\left[N\,(\cos f - e) - S\,\left(1+\frac{2\,r\,e^2}{p}\right)\,\sin f\right], \qquad (1.89)
\end{aligned}
$$

lub jeszcze prostsze – dla anomalii prawdziwej

$$
\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu\,p}}{r^2} - \dot{\omega} - c\,\dot{\Omega}. \qquad (1.90)
$$

Przypomnijmy, że $s = \sin I$, $c = \cos I$, $p = a\,(1-e^2)$, oraz $n = \sqrt{\mu\,a^{-3}}$.

ĆWICZENIA

Zadanie 3.1 Z równań (1.67) i (1.68) otrzymaj (1.69) i (1.70) (należy zastosować macierze obrotu, aby uzyskać wyrażenia wersorów w dowolnej wspólnej bazie).

Zadanie 3.2 Przeprowadź pełne wyprowadzenie wzoru (1.76).

Zadanie 3.3 Z równania (1.79) otrzymaj (1.81).

Zadanie 3.4 Z równania (1.81) otrzymaj (1.82).