WYKŁAD 2
Uzmiennianie stałych – wykorzystanie całek ruchu. Elementy oskulacyjne. Składowe RTB i NSB siły zaburzającej. Równanie Gaussa dla półosi wielkiej.

1.2.2 Wykorzystanie całek ruchu

W wielu sytuacjach równania ruchu w zmiennych oskulacyjnych można otrzymać w prostszy sposób niż ten, który został przedstawiony w rozdziale 1.2.1. Wystarczy zróżniczkować całki ruchu zagadnienia definiującego (1.11), uwzględniając pojawienie się nowej siły w $\dot{\boldsymbol{v}}$.

Oscylator z Przykładu 1.2 posiada całkę energii

$$E = \frac{1}{2}\left(\Phi_0^2 + \omega_0^2 \varphi_0^2\right) = \text{ const.} \tag{1.35}$$

Energia jest też związana z amplitudą A

$$E = \frac{\omega_0^2}{2} A^2. \tag{1.36}$$

Różniczkując oba równania, dostajemy

$$\dot{E} = \Phi\,\dot{\Phi} + \omega_0^2\,\varphi\,\dot{\varphi} = \Phi\,F_1. \tag{1.37}$$

oraz

$$\dot{E} = \omega_0^2\,A\,\dot{A}. \tag{1.38}$$

Przyrównując stronami (1.37) i (1.38), oraz uwzględniając $\dot{\varphi} = \Phi$, $\dot{\Phi} = -\omega_0^2\,\varphi + F_1$ i $\Phi = A\omega_0 \cos\psi$, otrzymujemy

$$\dot{A} \quad = \quad \frac{F_1\,\Phi}{A\,\omega_0^2} \;=\; \frac{F_1}{\omega_0}\,\cos\psi. \tag{1.39}$$

Pododobną procedurę zastosujemy do otrzymania równań Gaussa.

1.3 Elementy oskulacyjne i równania Gaussa

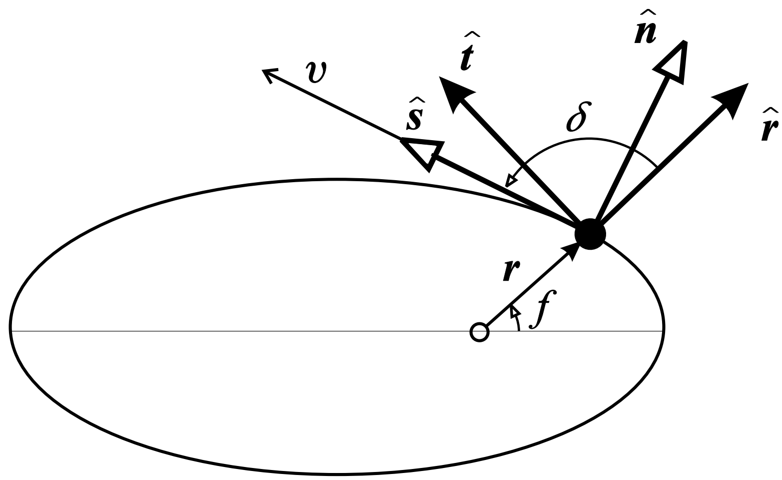
Elementy oskulacyjne to **uzmiennione stałe orbity keplerowskiej**. Jeśli do zgadnienia dwóch ciał z siłą

$$\boldsymbol{F}_0 = -\frac{\mu}{r^3}\,\boldsymbol{r},$$

dodamy siłę zaburzającą $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{P}$, i utrzymamy w mocy związki między elementami keplerowskimi $\mathcal{E}$:

$$a,\, e,\, I,\, \omega,\, \Omega,\, M_0 = M(t_0),$$

a położeniem i prędkością w dowolnym momencie t, to uzmiennione elementy przestają być stałymi ruchu.



Rysunek 1.1: Bazy r-t-b i n-s-b. Wersor binormalny skierowany jest „do góry” – prostopadle do płaszczyzny rysunku.

Moment czasu na który wyliczamy $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{v}$ nazywamy epoką oskulacji. Jednym z elementów oskulacyjnych jest $M_0(t)$ – anomalia średnia **epoki odniesienia** t_0 dla epoki oskulacji t.

Będziemy rozpatrywać równania ruchu

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{P}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Znaczenie stałej μ zależy od typu zagadnienia – względnego lub barycentrycznego. Róównania dla $\dot{a}$, $\dot{e}$, itd. przy dowolnej postaci siły $\boldsymbol{P}$ nazywamy równaniami Gaussa.

1.3.1 Składowe siły zaburzającej

Można wprowadzić dwie ortogonalne bazy w których rozpatrujemy $\boldsymbol{P}$
Baza „r-t-b” zdefiniowana jest przez wersory

- radialny $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\,r^{-1}$ – wzdłuż promienia wodzącego,
- transwersalny $\hat{\boldsymbol{t}} = \hat{\boldsymbol{b}} \times \hat{\boldsymbol{r}}$ – prostopadły do radialnego i leżący w płaszczyźnie orbity,
- binormalny $\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{G}\,G^{-1}$ – wzdłuż wektora momentu pędu.

Składowe siły $\boldsymbol{P}$ w tej bazie oznaczymy odpowiednio przez R, T i B:

$$\boldsymbol{P} = R\hat{\boldsymbol{r}} + T\hat{\boldsymbol{t}} + B\hat{\boldsymbol{b}}.$$

Baza „n-s-b” składa się z następujących wersorów:

- normalego $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{s}} \times \hat{\boldsymbol{b}}$, który określa kierunek normalnej zewnętrznej do krzywej jaką jest orbita,
- stycznego $\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{v}\, v^{-1}$, który pokrywa się z kierunkiem wektora prędkości,
- binormalnego $\hat{\boldsymbol{b}}$, wspólnego dla obu baz.

Siła $\boldsymbol{P}$ ma w tej bazie składowe N, S i B:

$$\boldsymbol{P} = N\hat{\boldsymbol{n}} + S\hat{\boldsymbol{s}} + B\hat{\boldsymbol{b}}.$$

Przejście pomiędzy R, T i N, S realizujemy poprzez obrót o kąt $\frac{\pi}{2} - \delta$, gdzie δ jest kątem między wektorami $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} R &= N \sin\delta + S\cos\delta, \\ T &= -N\cos\delta + S\sin\delta, \end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned} N &= R\sin\delta - T\cos\delta, \\ S &= R\cos\delta + T\sin\delta, \end{aligned} \tag{1.45}$$

Wprowadzając

$$\gamma = \sqrt{1 + 2\, e\, \cos f + e^2},$$

tak, aby $v = \gamma\, \sqrt{\mu/p}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \frac{e\sin f}{\gamma}, \\ \sin\delta &= \frac{1 + e\, \cos f}{\gamma} = \frac{p}{r\,\gamma}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

1.3.2 Od całki sił żywych do $\dot{a}$

Różniczkujemy całkę sił żywych

$$h = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\sqrt{\boldsymbol{r}\cdot \boldsymbol{r}}}, \tag{1.47}$$

otrzymując

$$\dot{h} = \boldsymbol{v}\cdot \dot{\boldsymbol{v}} + \frac{\mu}{(\boldsymbol{r}\cdot \boldsymbol{r})^{\frac{3}{2}}}\, \boldsymbol{r}\cdot \dot{\boldsymbol{r}}.$$

Wstawiamy $\dot{\boldsymbol{r}}$ i $\dot{\boldsymbol{v}}$ z równań (1.40)

$$\dot{h} = \boldsymbol{P}\cdot \boldsymbol{v}. \tag{1.48}$$

Stała energii h jest bezpośrednio powiązana z półosią wielką elipsy a wzorem $h = -\mu/(2a)$, a zatem oprócz (1.48) mamy również

$$\dot{h} = \frac{\mu}{2\,a^2}\, \dot{a}. \tag{1.49}$$

Przyrównując stronami równania (1.48) i (1.49) dochodzimy do pierwszego z równań Gaussa

$$\dot{a} = \frac{2\,a^2}{\mu}\,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{1.50}$$

W bazie n-s-b

$$\dot{a} = \frac{2\,a^2\,\gamma}{G}\,S. \tag{1.51}$$

W bazie r-t-b

$$\dot{a} = \frac{2\,a^2}{G}\,\left(R\,e\,\sin f + \frac{p}{r}\,T\right). \tag{1.52}$$

Równań (1.51) i (1.52) nie wolno stosować do orbit prostolinowych. Równań (1.50), (1.51) i (1.52) nie wolno stosować dla orbit innych niż eliptyczne.

ĆWICZENIA

Zadanie 2.1 Podaj wzory na składowe wersorów $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ i $\hat{\boldsymbol{s}}$ jako funkcje elementów keplerowskich a, e, ω, Ω, anomalii prawdziwej f i zmiennych pomocniczych γ, $s = \sin I$, $c = \cos I$. Sprawdź ortogonalność tak wyrażonych wersorów.

Zadanie 2.2 Ruch keplerowski zaburzony jest siłą

$$\boldsymbol{P} = -\alpha\,\boldsymbol{r}. \tag{8}$$

Rozłóż $\boldsymbol{P}$ na składowe R, T, B i podaj równanie Gaussa dla $\dot{a}$ w tym przypadku.

Zadanie 2.3 Ruch keplerowski zaburzony jest siłą

$$\boldsymbol{P} = -\alpha\,\boldsymbol{z}, \tag{9}$$

skierowaną wzdłuż osi z układu współrzędnych. Rozłóż $\boldsymbol{P}$ na składowe R, T, B i podaj równanie Gaussa dla $\dot{a}$ w tym przypadku.