WYKŁAD 1
Formalizm newtonowski. Uzmiennianie stałych

formalizm: zespół pojęć i podstawowych równań służących do opisu ruchu.
1.1 Formalizm newtonowski to opis ruchu wychodzący od kartezjańskich wektorów położeń i prędkości, ogólnego pojęcia siły oraz zasad dynamiki Newtona. Jest on pierwotny i najogólniejszy, gdyż nie nakładamy żadnych ograniczeń na postać siły.

- Równania ruchu N punktów materialnych to

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, t), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

  lub

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho}, t), \tag{1.2}$$

  gdzie **wektor stanu** ma składowe

$$\boldsymbol{\rho} = \mathrm{col}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N),$$

  a prawe strony równań ruchu to

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{col}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N, \frac{\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{\rho}, t)}{m_1}, \ldots, \frac{\boldsymbol{F}_N(\boldsymbol{\rho}, t)}{m_N}).$$

- Jawną zależność od czasu usuwamy wprowadzając **rozszerzony wektor stanu** $\boldsymbol{\rho}^* = \mathrm{col}(\boldsymbol{\rho}, u)$ oraz $\boldsymbol{G}^* = \mathrm{col}(\boldsymbol{G}, 1) = \boldsymbol{G}^*(\boldsymbol{\rho}^*)$. Uwaga: $\dot{u} = 1 \Rightarrow u = t$.

- **Przykład 1.1 – Wahadło matematyczne**
  Wyprowadzenie równań ruchu wahadła. Sama druga zasada dynamiki nie wystarcza, gdyż trzeba jeszcze uwzględnić równanie więzów.
  Wynik:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin\varphi, \tag{1.9}$$

  gdzie $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, lub

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -\omega_0^2 \sin\varphi, \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.2 Metoda uzmienniania stałych
1.2.1 Podstawy metody
Układ o M stopniach swobody $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^M$ ma równania ruchu

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Rozwiązanie tych równań

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{C}, t), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{C}, t), \tag{1.12}$$

zależy od czasu t oraz od stałych dowolnych $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{2M}$. Stałe dowolne wyznaczamy rozwiązując (1.12) względem $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \tag{1.16}$$

Metoda uzmienniania stałych (ang. *variation of arbitrary constants*) polega na przyjęciu, że równania (1.16) obowiązują także dla rozwiązania równań z dodatkową siłą $\boldsymbol{F}_1$

$$\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{r}} & = & \boldsymbol{v}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} & = & \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}). \end{array} \tag{1.15}$$

W tej sytuacji jednak dotychczasowe stałe $\boldsymbol{C}$ przestają być stałymi. Nowe zmienne $\boldsymbol{C}(t)$ nazywamy zmiennymi oskulacyjnymi.

Równania ruchu dla zmiennych oskulacyjnych mają postać

$$\dot{\boldsymbol{C}} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \tag{1.25}$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial C_1}, & \ldots, & \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial C_{2M}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial C_1}, & \ldots, & \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial C_{2M}} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{C}, t), \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{C}, t)) \end{array}\right]. \tag{1.24}$$

$\mathbf{A}$ to macierz Jacobiego $\frac{\partial\, \mathrm{col}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0)}{\partial \boldsymbol{C}}$.

- **Przykład 1.2 – Uzmiennianie stałych dla małych drgań wahadła matematycznego** (w osobnym pliku)

ĆWICZENIA

Zadanie 1.1 Przyjmij układ definiujący (1.11) o jednym stopniu swobody

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = 0. \tag{1}$$

Podaj jego rozwiązanie zależne od dwóch stałych dowolnych $\boldsymbol{C} = (a, b)^{\mathrm{T}}$. Sformułuj równania ruchu dla $\dot{\boldsymbol{C}}$, jeśli w układzie pojawi się dodatkowa siła

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \alpha, \tag{2}$$

gdzie parametr $\alpha = \mathrm{const}$. Rozwiąż je, znajdując $\boldsymbol{C}(t)$ i podaj wyrażenia dla $x(t)$ oraz $v(t)$.
UWAGA: Odróżniać parametry zgadnienia od stałych dowolnych !

Zadanie 1.2 Rozpatrz ruch jednostajnie przyspieszony z tarciem lepkim

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \alpha - \beta\, v, \tag{3}$$

gdzie α i β są stałymi parametrami. Podaj równania ruchu dla zmiennych oskulacyjnych $\boldsymbol{C} = (a, b)^{\mathrm{T}}$ w dwóch przypadkach:

(a) Siła (na jednostkę masy) $\boldsymbol{F}_0 = \alpha$, $x_0 = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 + a\, t + b$, $v_0 = \alpha\, t + a$.

(b) Siła (na jednostkę masy) $\boldsymbol{F}_0 = -\beta\, v$, $x_0 = a\, \exp(-\beta\, t) + b$, $v_0 = -a\, \beta\, \exp(-\beta\, t)$.

Znajdź rozwiązanie $\boldsymbol{C}(t)$ i otrzymaj $x(t)$, $v(t)$ w dowolnie wybranym przypadku ((a) lub (b)).

Zadanie 1.3 Niech układem definiującym będą równania ruchu oscylatora harmonicznego

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2\, x. \tag{4}$$

Podaj równania dla uzmiennionych stałych $\boldsymbol{C} = (A, \chi)^{\mathrm{T}}$ rozwiązania

$$x = A\, \sin(\omega_0 t + \chi), \quad v = A\, \omega_0 \cos(\omega_0 t + \chi), \tag{5}$$

jeśli wprowadzimy siłę tarcia

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2\, x - \beta\, v. \tag{6}$$

Zadanie 1.4 Powtórz zadanie 1.3, przyjmując zamiast (5) stałe $\boldsymbol{C} = (c, s)^{\mathrm{T}}$ rozwiązania

$$x = c\, \cos(\omega_0 t) + s\, \sin(\omega_0 t), \quad v = -c\, \omega_0 \sin(\omega_0 t) + s\, \omega_0 \cos(\omega_0 t). \tag{7}$$